

Kapittel 5, Diskret Sannsynsfordelingar

- Sjå på eit utval av ofte brukte diskret sannsynsfordelingar
 - Binomisk (Bernoulli prosess) **I går**
 - Multinomisk **I går**
 - Hypergeometrisk
 - Geometrisk
 - Negativ binomisk
 - Poisson
- Prosserar desse beskriv
 - Bernoulli prosess **I går**
 - Poisson prosess
- Nokre eigenskapar
 - $E(X)$ og $Var(X)$

Diskret stokastisk variabel

Eit stokastisk variabel som gjev eit endeleg eller tellbart antall utfall.

Definisjon diskret sannsynsfordeling

Paret $(x, f(x))$ blir kalla sannsynsfordelinga til den diskret stok. var. X dersom

- 1 $0 \leq f(x)$
- 2 $\sum_{\forall x} f(x) = 1$ (summen over alle moglege x)
- 3 $f(x) = P(X = x)$

Bernoulli prosess

- 1 n uavhengige forsøk
- 2 Kvart forsøk resulterer i suksess, $I_i = 1$ eller ikkje-suksess $I_i = 0$.
- 3 Suksess-sannsynet $p = P(I_i = 1)$ er konstant.

Binomisk fordeling

Ser på antall suksess i ein Bernoulli prosess, $X = \sum_{i=1}^n I_i$. X er då binomisk fordelt;

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}$$

Hypergeometrisk fordeling

- Urne med N kuler.
- k blåe kuler (suksess)
- $N - k$ raude kuler (ikkje-suksess)
- Trekker n kuler
- X er antall av dei trekte som er blåe (suksess).

Definisjon hyper-geometrisk

$$f(x; N, n, k) = h(x; N, n, k) = \frac{\binom{k}{x} \binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Spørjeundersøking i studieprogram

Studieprogram har $N = 50$ studentar.
For eller i mot obligatorisk øving?
Nok å spørje 10?

Spørjeundersøking i studieprogram

Studieprogram har $N = 50$ studentar.

For eller i mot obligatorisk øving?

Nok å spørje 10?

Kva om $k = 20$ er for og $N - k = 30$ er i mot?

La X vere antal av dei 10 som er for. (I Matlab, $M=50$, $K=20$, $N=10$)

Kva er $P(X \geq 5) = ?$

Geometrisk fordeling (Kap 5.4)

Geometrisk fordeling

Dersom vi har uavhengige forsøk, kvar med suksess sannsyn p og ikkje-suksess sannsyn $q = 1 - p$, og lar X vere antallet forsøk tom første suksess, så er X geometrisk fordelt med sannsynsfunksjon

$$f(x; p) = g(x; p) = (1 - p)^{x-1} p$$

Forventning og varians, teorem 5.3

Dersom X er geometrisk fordelt med parameter p , så er

$$\mu = E(X) = \frac{1}{p}$$

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = \frac{1 - p}{p^2}$$

Eks: Treng 6-ar, kor mange kast?

Negativ binomisk fordeling (Kap 5.4)

Negativ binomisk fordeling

Dersom vi har uavhengige forsøk, kvar med suksess sannsyn p , og lar X vere antallet forsøk tom k -te suksess, så er X negativ binomisk fordelt med sannsynsfunksjon

$$f(X; k, p) = \binom{x-1}{k-1} p^k (1-p)^{x-k}$$

for $x = k, k+1, \dots$

Forventning og varians

Dersom X er negativ binomisk fordelt med parametre k og p , så er

$$\mu = E(X) = \frac{k}{p}$$

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = k \frac{1-p}{p^2}$$

- 1 Talet på hendingar som inntreff i eit tidsintervall er uavhengig av talet på hendingar som inntreff i disjunkte tidsintervall.
- 2 Sannsynet for at ei hending inntreff i eit kort tidsintervall er lineært med lengda på tidsintervallet, og er uavhengig av om det inntreff hendingar før eller etter intervallet.
- 3 Sannsynet for at det inntreff meir enn ei hending innanfor eit lite tidsintervall er neglisjerbart.

PS: Kan bytte ut tid med distanse, areal, volum,

- Antall jordskjelv
- Antall bakteriar i ei prøve
- Antall α -partiklar i bakgrunnsstråling
- Antall pasientar innlagt på ei sjukehusavdeling
- Antall aviser solgt i ein butikk
- Antall ulykker på ei vegstrekning
- Antall strømbrudd

Poissonfordeling

La X vere talet på hendingar i eit tidsintervall t . X er poissonfordelt dersom sannsynsfordelinga er

$$f(x; \lambda t) = p(x; \lambda t) = \frac{\exp(-\lambda t)(\lambda t)^x}{x!}$$

der λ er gjennomsnittleg antall hendingar per tidseining (f.eks. time).

Bruker ofte $\mu = \lambda t$, f.eks. i tabellen.

Forventning og varians, teorem 5.4

Dersom X er poissonfordelt med parameter λt , så er

$$E(X) = \lambda t$$

$$\text{Var}(X) = \lambda t$$

- Sjå på eit utval av ofte brukte diskret sannsynsfordelingar
 - **Binomisk** (antall suksess, Bernoulli prosess / trekking med tilbakelegging)
 - **Multinomisk** (antall i kategoriar, Multinomisk prosess)
 - **Hypergeometrisk** (antall suksess, trekking utan tilbakelegging)
 - **Geometrisk** (antal forsøk til første suksess i Bernoulli prosess)
 - **Negativ binomisk** (antall forsøk til k-te suksess i Bernoulli prosess)
 - **Poisson** (poissionprosess)