Dagens tekst

Kap 4: Matematisk forventning

Viktige omgrep

- Forventningsverdi
- Varians / standard avvik
- Kovarians / korrelasjon

Viktige reknereglar

Forventning til lineærkombinasjon:

$$E(a_0+a_1X_1+\ldots a_nX_n) = a_0+a_1E(X_1)+\cdots+a_nE(X_n)$$

Varians til lineærkombinasjon:

Definisjon 4.1

La X vere ein stok.var. med sannsynsfordeling $f(x)$.
Forventningsverdien til X er då

$$\mu = E(X) = \sum_{\forall x} x f(x)$$

dersom X er diskret, og

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

dersom X er kontinuerleg.

Tolkning:

- Gjennomsnitt av uendeleg mange data trukke frå $f(x)$
- Tyngdepunktet i fordelinga.

Forventningsverdi av funksjon av stokastisk variabel

Teorem 4.1

For ein funksjon g(X);

$$\mu_{g(X)} = E(g(X)) = \sum_x g(x)f(x)$$

for diskret X, og

$$\mu_{g(X)} = E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$$

for kontinuerleg X.

Varians

Definisjon 4.3

La X vere ein stok. var. med forventning μ. Variansen til X er då:
For diskret X:

$$Var(X) = E((X-\mu)^2) = \sum_{\forall x}(x-\mu)^2 f(x)$$

For kontinuerleg X:

$$Var(X) = E((X-\mu)^2) = \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx$$

Tolkning Spredning, $Std(X) = \sqrt{Var(X)}$ same skala som X.
Eiganskap Må vere positiv (eller 0).

Teorem 4.2

Teorem 4.2

Variansen til ein stokastisk vaiabel X er;

$$\sigma^2 = E(X^2) - E(X)^2$$

Ofte enklare å bruke enn definisjonen direkte.

Leigebil i ferien

Er interessert i kostnaden på leigebil i ferien.
Pris:

- Fast pris: $a = 500$ €
- Km pris: $b = 0.2$ €/ km

Her ei sannsynsfordeling $f(x)$ på lengda X som skal kjørast.

- $E(X) = 2000km$
- $Var(X) = (500km)^2$

Kostnad

$$Y = a + bX$$

Forventning og varians til lineær funksjon

Teorem 4.5 og Korrolar 4.8, VIKTIG

La X vere ein stok. var. med $E(X) = \mu_X$ og $Var(X) = \sigma_X^2$, og la $Y = a + bX$, der a og b er kjende konstantar. Då er;

$$E(Y) = a + b\mu_X$$

$$Var(Y) = b^2\sigma_X^2$$

Chebychevs teorem

Teorem 4.10

Sannsynet for at ein stokastisk variabel tar ein verdi innanfor k standardavvik frå forventningsverdien er minst $1 - 1/k^2$.
Dvs

$$P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

Kovarians

Definisjon 4.4

La X og Y vere stokastiske variable med simultan sannsynsfordeling $f(x,y)$, og forventning hhv μ_x og μ_y. Kovariansen til X og Y er då:

$$Cov(X,Y) = \sigma_{xy} = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$$

For kontinuerleg X og Y:

$$Cov(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_X)(y-\mu_Y)f(x,y)dxdy$$

For diskret X og Y:

$$Cov(X,Y) = \sum_{\forall x}\sum_{\forall y}(x-\mu_X)(y-\mu_Y)f(x,y)$$

Teorem 4.4

$$\sigma_{xy} = E(XY) - \mu_x \mu_y$$

Korrelasjon

Definisjon 4.5

La X og Y vere stokastiske variable med varians hhv σ_X^2 og σ_Y^2, og kovarians σ_{XY}. Korrelasjonskoeffisientent til X og Y er då;

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Eigneskap:

$$-1 \leq \rho \leq 1$$

Kovarians til uavhengige stokastiske variable

Korrolar 4.5

Dersom X og Y er uavhengige stokastiske variable, så er kovariansen og korrelasjonen null; $\sigma_{XY} = \rho_{XY} = 0$.

SÅ:

$$\text{uavhengigheit} \Rightarrow \sigma_{XY} = 0$$

MEN:

$$\sigma_{XY} = 0 \not\Rightarrow \text{uavhengigheit}$$

Korrelasjon og kovarians er eit mål på **lineær** avhengigheit.

Eksempel, berehjelp for mormor 1

Eg er med mormor på butikken som berehjep. Kor mykje må eg bere?

Ho kjøper:

- alltid 2 liter melk ($a = 2kg$)
- X pakkar mjøl, kvar på $b = 2kg$
- Y pakkar sukker, kvar på $c = 1kg$

Veit at:

- $E(X) = \mu_X = 1.5$ og $Var(X) = \sigma_X^2$
- $E(Y) = \mu_Y = 2$ og $Var(Y) = \sigma_Y^2$

Totalt å bere:

$$Z = a + bX + cY$$

$E(Z) = a + b\mu_X + c\mu_Y$

Forventning og varians av lineærkombinasjon

Teorem, VIKTIG

Dersom $a_0, a_1, \ldots, a_n$ er konstantar og $X_1, X_2, \ldots X_n$ stok. var., så er

$$E(a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i X_i) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i)$$

og

$$Var(a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i X_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var(X_i) + 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} a_i a_j Cov(X_i, X_j)$$

for ***uavhengige*** $X_1, \ldots, X_n$ er

$$Var(a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i X_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var(X_i)$$

Eksempel, berehjelp for mormor 2

Eg er med mormor på butikken som berehjep. Kor mykje må eg bere?
Ho kjøper fisk og kjøt i ferskdisken for ei heil veke:

- Xkg fisk
- Ykg kjøt

Veit at:

- $E(X) = \mu_X = 1kg$ og $Var(X) = \sigma_X^2$
- $E(Y) = \mu_Y = 1kg$ og $Var(Y) = \sigma_Y^2$

Totalt å bere:

$$Z = X + Y$$

Viktige omgrep

- Forventningsverdi
- Varians / standard avvik
- Kovarians / korrelasjon

Viktige reknereglar

Forventning til lineærkombinasjon:

$$E(a_0+a_1X_1+\dots a_nX_n) = a_0+a_1E(X_1)+\cdots+a_nE(X_n)$$

Varians til lineærfunksjon:

$$Var(a+bX_1) = b^2 Var(X_1)$$

Dersom $X_1, X_2, \dots X_n$ er **uavhengige**:

$$Var(a_0+a_1X_1+a_2X_2+\cdots+a_nX_n) = a_1^2 Var(X_1)+a_2^2 Var(X_2)+\dots a_n^2 Var(X_n)$$

Kun for lineær kombinasjonar....

fristelsar.....

$Z = X/Y$

$$E(Z) \neq \frac{E(X)}{E(Y)}$$

...only the hard way...

Må bruke definisjonen på forventning for funksjon av to stok.var. Kan evt. approksimere vha Taylorrekker.