Denne veka

Kap 7: Funksjonar av stokastiske variable

- Transformasjon av variable
- Moment
- Momentgenererande funksjon

Notat: Ordningsvariable og ekstremvariable

- Ordnings variable
- Maksimum
- Minumum

Transformasjon av diskret stokastisk variabel

Teorem 7.1

La X vere ein diskret stokastisk variabel med sannsynsfordeling $f(x)$. La $Y = u(X)$, ein 1-1 transformasjon mellom X og Y, slik at $y = u(x)$ gjev $x = w(y) = u^{-1}(y)$.
Sannsynsfordelinga til Y er då

$$g(y) = f[w(y)]$$

Transformasjon av kontinuerleg stokastisk variabel

Teorem 7.3 og 7.4

La X vere ein kontinuerleg stokastisk variabel med sannsynsfordeling $f(x)$. La $Y = u(X)$, ein 1-1 transformasjon mellom X og Y, slik at $y = u(x)$ gjev $x = w(y) = u^{-1}(y)$. Sannsynsfordelinga til Y er då

$$g(y) = f[w(y)]|J|$$

der J er Jacobianen til transformasjonen.

For ein-dimmensjonal X er $J = w'(y)$

Transformasjon av kontinuerleg stokastisk variabel, forts

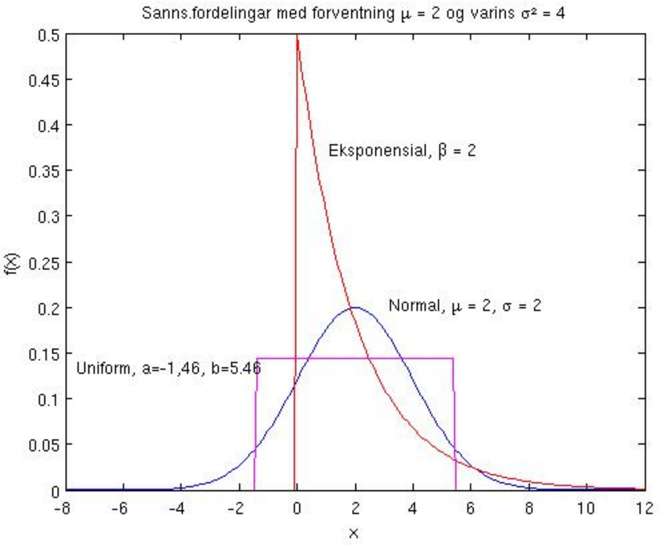
Teorem 7.5

La X vere ein kontinuerleg stokastisk variabel med sannsynsfordeling $f(x)$. La $Y = u(X)$, definere ein transformasjon som ikkje er 1-1. Dersom intervallet X er definert over kan delast opp i k parvis disjunkte intervall, s.a. kvar av inversfunksjoname $x_k = w_k(y)$ definerer ein 1-1 transformason. Då er

$$g(y) = \sum_{i=i}^{k} f[w_i(y)]|J_i|$$

der $J_i = w_i'(y)$ for $i = 1, 2, \dots k$.

Felles forventning og varians



Moment om origo og sentralmoment

Def. 7.1: Moment om origo

Det r-te momentet om origo til ein stokastisk variabel X er gjeve ved;

$$\mu'_r = E(X^r) = \begin{cases} \sum x^r f(x) & \text{for diskret } X \\ \int x^r f(x)dx & \text{for kontinuerleg } X \end{cases}$$

Moment om origo og sentralmoment

Def. 7.1: Moment om origo

Det r-te momentet om origo til ein stokastisk variabel X er gjeve ved;

$$\mu'_r = E(X^r) = \begin{cases} \sum x^r f(x) & \text{for diskret } X \\ \int x^r f(x) dx & \text{for kontinuerleg } X \end{cases}$$

Sentralmoment

Det r-te sentralmomentet (momentet) til ein stokastisk variabel X med $E(X) = \mu$ er;

$$\mu_r = E((X - \mu)^r) = \begin{cases} \sum (x-\mu)^r f(x) & \text{for diskret } X \\ \int (x-\mu)^r f(x) dx & \text{for kontinuerleg } X \end{cases}$$

Momentgenererande funksjon

Definisjon 7.2

Den momentgenererande funksjonen $M_X(t)$ til ein stokastisk variabel X er gjeve ved $E[\exp(tX)]$;

- $M_X(t) = E(\exp(tX)) = \sum_{\forall x} f(x)\exp(tx)$
- $M_X(t) = E(\exp(tX)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(tx)dx$

Teorem 7.6

La X vere ein stokastisk variabel med momentgenererande funksjon $M_X(t)$. Då er r-te moment

$$\mu_r' = \frac{d^r M_X(t)}{dt}\Big|_{t=0}$$

Definisjon 4.2

La X og Y vere to stokastiske variable med simultanfordeling $f(x,y)$, og $g(x,y)$ ein funksjon. Då er
dersom diskre

$$\mu_{g(X,Y)} = E[g(X,Y)] = \sum_x \sum_y g(x,y) f(x,y)$$

dersom kontinuerleg

$$\mu_{g(X,Y)} = E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f(x,y) dxdy$$

Teorem 7.7

La X og Y vere stokastistke variable med momentgenererande funksjonenar hhv $M_X(t)$ og $M_Y(t)$.
$M_X(t) = M_Y(t) \Rightarrow X$ og Y har identisk sannsynsfordeling.

Teorem 7.7

La X og Y vere stokastistke variable med momentgenererande funksjonenar hhv $M_X(t)$ og $M_Y(t)$.
$M_X(t) = M_Y(t) \Rightarrow X$ og Y har identisk sannsynsfordeling.

Teorem 7.8 og 7.9

- $M_{X+a}(t) = e^{at} M_X(t)$.
- $M_{aX}(t) = M_X(at)$.

Teorem 7.7

La X og Y vere stokastistke variable med momentgenererande funksjonenar hhv $M_X(t)$ og $M_Y(t)$.
$M_X(t) = M_Y(t) \Rightarrow X$ og Y har identisk sannsynsfordeling.

Teorem 7.8 og 7.9

- $M_{X+a}(t) = e^{at} M_X(t)$.
- $M_{aX}(t) = M_X(at)$.

Teorem 7.10

La $X_1, X_2, \ldots, X_n$ vere uavhengige stokastiske variable med momentgenererande funksjonar hhv. $M_{X_1}(t), M_{X_2}(t), \ldots, M_{X_n}(t)$.
La $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Då er
$M_Y(t) = M_{X_1}(t) \cdot M_{X_2}(t) \ldots M_{X_n}(t)$

Lineær kombinasjon av normalfordelte stokastiske variable

Teorem 7.11 VIKTIG

La $X_1, X_2, \ldots X_n$ vere *uavhengige* normalfordelte variable med $E(X_i) = \mu_i$ og $Var(X_i) = \sigma_i^2$.
La

$$Y = a_0 + a_1 X_1 + \ldots a_n X_n.$$

Då er

$$y \sim N(a_0 + a_1\mu_1 + \cdots + a_n\mu_n, a_1^2\sigma_1^2 + \ldots a_n^2\sigma_n^2)$$

Teorem 7.12

La $X_1, X_2, \dots X_n$ vere uavhengige χ^2-(kji-kvadrat)-fordelte stokastiske variable med hhv $\nu_1, \nu_2 \dots \nu_n$ fridomsgrader og la

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$

Då er Y χ^2-fordelt

$$Y \sim \chi^2_\nu$$

med $\nu = \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_n$ fridomsgrader.

- Transformasjon av variable
  - Diskret
  - Kontinuerleg (1-1 transformasjon)
- Moment
  Treng meir enn forventning og varians for å beskrive sannsynsfordelingar
- Momentgenererande funksjon (*for å finne fordeling til lineærtransformasjon*)

Teorem 7.11

La $X_1, X_2, \dots X_n$ vere *uavhengige* normalfordelte variable med $E(X_i) = \mu_i$ og $Var(X_i) = \sigma_i^2$.
La $Y = a_0 + a_1 X_1 + \dots a_n X_n$. Då er

$$y \sim N(a_0 + a_1\mu_1 + \cdots + a_n\mu_n, a_1^2\sigma_1^2 + \dots a_n^2\sigma_n^2)$$