Kapittel 6, Kontinuerlege Sannsynsfordelingar

- Sjå på eit utval av ofte brukte kontinuerlege sannsynsfordelingar
  - Uniform
  - Normal
  - Eksponensial
  - Gamma
  - Weibull
  - (Kji-kvadrat)
  - (Student-T)
- Nokre eigenskapar
  - $E(X)$ og $Var(X)$

Definisjon

Funksjonen $f(x)$ definert for alle reelle tal $x \in \Re$ blir kalla sannsynsfordelinga til den kontinuerlege stok. var. X dersom

- $0 \leq f(x)$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
- $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$

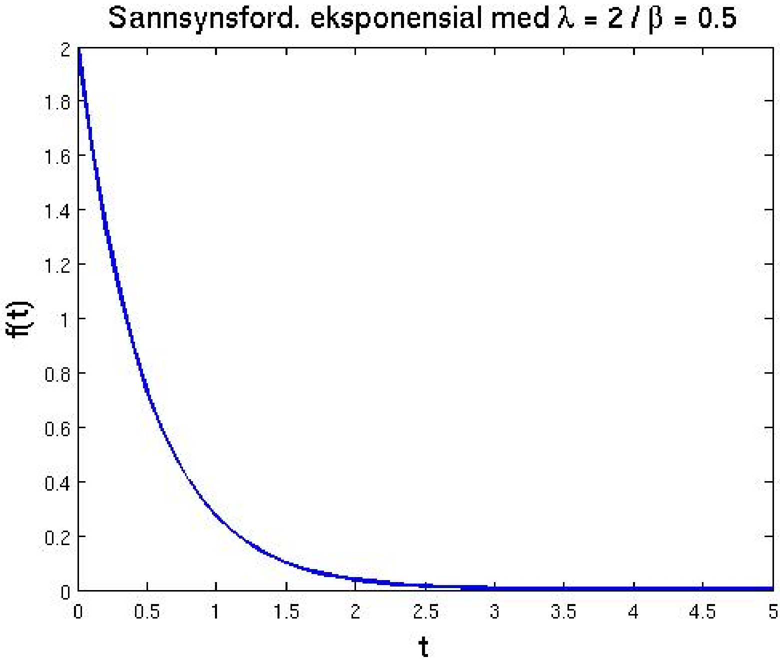
Poissonprosess og fordeling

Poissonprosess:

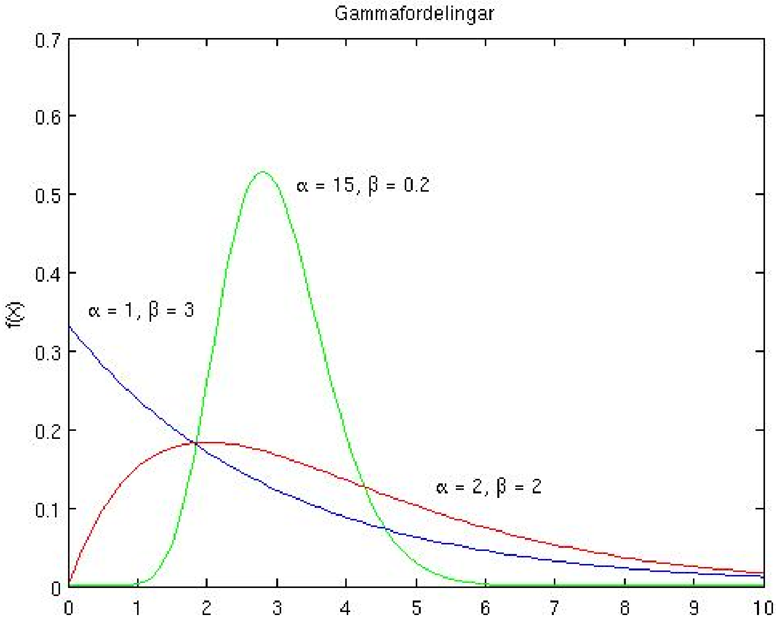
- Talet på hendingar som inntreff i eit intervall er uavhengig av talet på hendingar som inntreff i disjunkte intervall.
- Sannsynet for at ei hending inntreff i eit lite intervall er lineært med lengda på intervallet, og er uavhengig av om det inntreff hendingar før eller etter intervallet.
- Sannsynet for at meir enn ei hending inntreff i eit lite intervall er neglisjerbart.

Poissonfordeling

$$p(x; \lambda t) = \frac{\exp(-\lambda t)(\lambda t)^x}{x!}$$


Sannsynsford. eksponensial med λ = 2 / β = 0.5
f(t)
t
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2
0.5
1.5
2.5
3
3.5
4
4.5
5

Gammafordeling



Spesialtilfeller gammafordeling

$$X \sim Ga(\alpha, \beta)$$

$$\begin{aligned} \alpha = 1\text{:} &\quad \text{Eksponensial med parameter } \beta \\ \beta = 2 \text{ og } \alpha = \nu/2\text{:} &\quad \chi^2\text{-fordelt med parameter } \nu \\ \alpha \to \infty\text{:} &\quad \Rightarrow X \to N(\alpha\beta, \alpha\beta^2) \end{aligned}$$

Bruksområde gammafordeling

- Når andre ikkje passar (f.eks. mengde nedbør per månad)
- Kan vise at ventetida til hending nr α i ein Poisson-prosess med intensitet λ er $Ga(\alpha, \beta = 1/\lambda)$
- χ^2-fordeling: I samband med estimering av varians.

χ^2 fordeling

Notasjon: $X \sim \chi^2_\nu$
Eigenskapar:

- $E(X) = \nu$
- $Var(X) = 2\nu$
- Dersom $Z \sim N(0,1)$, så er $Z^2 \sim \chi^2_\nu$

Weibull-fordeling

Eksempel: levetida til ein sensor (som ikkje kan reparerast)

Weibullfordeling

Der stokastiske variabelen X er weibullfordelt dersom

$$f(t; \alpha, \beta) = \alpha\beta t^{\beta-1} \exp(-\alpha t^{\beta})$$

for $t > 0$, $\alpha > 0$ og $\beta > 0$.
Kummulativ fordeling er;

$$F(t; \alpha, \beta) = 1 - \exp(-\alpha t^{\beta})$$

Weibull-fordeling

Eksempel: levetida til ein sensor (som ikkje kan reparerast)

Weibullfordeling

Der stokastiske variabelen X er weibullfordelt dersom

$$f(t;\alpha,\beta) = \alpha\beta t^{\beta-1}\exp(-\alpha t^{\beta})$$

for $t > 0$, $\alpha > 0$ og $\beta > 0$.
Kummulativ fordeling er;

$$F(t;\alpha,\beta) = 1 - \exp(-\alpha t^{\beta})$$

- $\beta = 1$: eksponensialfordeling
- Parametrisering i Matlab: $a = \alpha^{-\beta}$ og $=\beta$

Weibull-fordeling og hasard funksjon

Pålitlighet: sannsynet for å virke ved tid t.
$R(t) = P(T > t) = \int_t^\infty f(t)dt = 1 - F(t)$

Weibull-fordeling og hasard funksjon

Pålitlighet: sannsynet for å virke ved tid t.

$$R(t) = P(T > t) = \int_t^\infty f(t)dt = 1 - F(t)$$

Feile i $(t, \Delta t)$ gitt at det viker ved tid t $\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{R(t)}$

Weibull-fordeling og hasard funksjon

Pålitlighet: sannsynet for å virke ved tid t.

$$R(t) = P(T > t) = \int_t^\infty f(t)dt = 1 - F(t)$$

Feile i $(t, \Delta t)$ gitt at det viker ved tid t $\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{R(t)}$

Hasardfunksjon:

$$Z(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{F(t+\Delta t) - F(t)}{\Delta t} \frac{1}{R(t)}$$

Weibull-fordeling og hasard funksjon

Pålitlighet: sannsynet for å virke ved tid t.

$$R(t) = P(T > t) = \int_t^\infty f(t)dt = 1 - F(t)$$

Feile i $(t, \Delta t)$ gitt at det viker ved tid t $\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{R(t)}$

Hasardfunksjon:

$$Z(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{F(t+\Delta t) - F(t)}{\Delta t} \frac{1}{R(t)}$$
$$= \frac{F'(t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{R(t)}$$

Weibull-fordeling og hasard funksjon

Pålitlighet: sannsynet for å virke ved tid t.

$$R(t) = P(T > t) = \int_t^{\infty} f(t)dt = 1 - F(t)$$

Feile i $(t, \Delta t)$ gitt at det viker ved tid t $\frac{F(t+\Delta t) - F(t)}{R(t)}$

Hasardfunksjon:

$$\begin{aligned} Z(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} \frac{1}{R(t)} \\ &= \frac{F'(t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{R(t)} \\ &= \alpha \beta t^{\beta - 1} \end{aligned}$$

Eigenskapar hasardfunksjonen i Weibull

$$Z(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}$$

$\beta = 1$: $Z(t) = \alpha$ (konstant). Gløymsk fordeling

$\beta > 1$: $Z(t)$ stigande. Meir og meir sannsyleg at komponenten feilar (aldring).

$\beta < 1$: $Z(t)$ synkande. Mindre og mindre sannsynleg at komponenten feilar (barnesjukdommar).

- Sjå på eit utval av ofte brukte kontinuerlege sannsynsfordelingar
  - Uniform
  - Normal
  - Eksponensial
  - Gamma
  - Weibull
  - (Kji-kvadrat)
  - (Student-T)
- Nokre eigenskapar
  - $E(X)$ og $Var(X)$