# Dagens tekst

Kap 4: Matematisk forventning

## Viktige omgrep

- Forventningsverdi
- Varians / standard avvik
- Kovarians / korrelasjon

## Viktige rekneregler

Forventning til lineærkombinasjon:

Varians til lineærkombinasjon:

# Forventningsverdi

## Definisjon 4.1

La $X$ vere ein stok.var. med sannsynsfordeling $f(x)$.
Forventningsverdien til $X$ er då

$$\mu = E(X) = \sum_{\forall x} xf(x)$$

dersom $X$ er diskret, og

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

dersom $X$ er kontinuerleg.

Tolkning:

- Gjennomsnitt av uendeleg mange data trukke frå $f(x)$
- Tyngdepunktet i fordelinga.

# Forventningsverdi av funksjon av stokastisk variabel

**Teorem 4.1**

For ein funksjon g(X);

$$\mu_{g(X)} = E(g(X)) = \sum_x g(x)f(x)$$

for diskret $X$, og

$$\mu_{g(X)} = E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$$

for kontinuerleg $X$.

# fristelsar.....

Har: $Y = g(X)$
Ønsker: $E(Y)$
Generelt:

$$E(Y) \neq g(E(X))$$

**...only the hard way...**

Må bruke definisjonen på forventning for funksjon av stok.var. Kan evt. approksimere vha Taylorrekker (jf Ex 4.24 og 4.25). Eller simulere.

# Leigebil i ferien

Er interessert i kostnaden på leigebil i ferien.
Pris:

- Fast pris: $a = 500$ €
- Km pris: $b = 0.2$ €/ km

Her ei sannsynsfordeling $f(x)$ på lengda $X$ som skal kjørast.

- $E(X) = 2000km$
- $Var(X) = (500km)^2$

**Kostnad**

$$Y = a + bX$$

# Forventning av lineær funksjon

**Teorem 4.5**

Dersom $a$ og $b$ er konstantar og $X$ ein stok. var., så er

$$E(a + bX) = a + bE(X)$$

# Eksempel, berehjelp for mormor 1

Eg er med mormor på butikken som berehjep. Hor mykje må eg bere?

Ho kjøper:

- alltid 2 liter melk ($a = 2kg$)
- $X$ pakkar mjøl, kvar på $b = 2kg$
- $Y$ pakkar sukker, kvar på $c = 1kg$

Veit at:

- $E(X) = \mu_X = 1.5$ og $Var(X) = \sigma_X^2$
- $E(Y) = \mu_Y = 2$ og $Var(Y) = \sigma_Y^2$

**Totalt å bere:**

$$Z = a + bX + cY$$

$$E(Z) = a + b\mu_X + c\mu_Y$$

**Definisjon 4.2**

La $X$ og $Y$ vere to stokastiske variable med simultanfordeling $f(x,y)$, og $g(x,y)$ ein funksjon. Då er
dersom diskre

$$\mu_{g(X,Y)} = E[g(X,Y)] = \sum_x \sum_y g(x,y) f(x,y)$$

dersom kontinuerleg

$$\mu_{g(X,Y)} = E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f(x,y) dxdy$$

### Teorem 4.7

La $X$ og $Y$ vere to stokastiske variable, og $g(x, y)$ og $h(x, y)$ to funksjonar. Då er

$$E[g(X, Y) + h(X, Y)] = E[g(X, Y)] + E[h(X, Y)]$$

**Forventning av lineærkombinasjon**

La $X$ og $Y$ vere to stokastiske variable, og $a$, $b$ og $c$ konstantar. Då er

$$E(aX + bY + c)] = aE(X) + bE(Y) + c$$

Bevis: korrolar 4.3 + teorem 4.5

Kap 4: Matematisk forventning

## Viktige omgrep

- Forventningsverdi
- Varians / standard avvik
- Kovarians / korrelasjon

## Viktige reknereglar

Forventning til lineærkombinasjon:

$$E(a_0+a_1X_1+\dots a_nX_n) = a_0+a_1E(X_1)+\cdots+a_nE(X_n)$$

Varians til lineærkombinasjon:

# Varians

## Definisjon 4.3

La $X$ vere ein stok. var. med forventning $\mu$. Variansen til $X$ er då:
For diskret $X$:

$$Var(X) = E((X-\mu)^2) = \sum_{\forall x} (x-\mu)^2 f(x)$$

For kontinuerleg $X$:

$$Var(X) = E((X-\mu)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x) dx$$

**Teorem 4.2**

Variansen til ein stokastisk vaiabel $X$ er;

$$\sigma^2 = E(X^2) - E(X)^2$$

Ofte enklare å bruke enn definisjonen direkte.

# Forventning og varians til lineær funksjon

**Teorem 4.5 og 4.9, VIKTIG**

La $X$ vere ein stok. var. med $E(X) = \mu_X$ og $Var(X) = \sigma_X^2$, og la $Y = a + bX$, der $a$ og $b$ er kjende konstantar. Då er;

$$E(Y) = a + b\mu_X$$

$$Var(Y) = b^2\sigma_X^2$$

## Definisjon 4.4

La $X$ og $Y$ vere stokastiske variable med simultan sannsynsfordeling $f(x,y)$, og forventning hhv $\mu_x$ og $\mu_y$.
Kovariansen til $X$ og $Y$ er då:

$$Cov(X,Y) = \sigma_{xy} = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$$

For kontinuerleg $X$ og $Y$:

$$Cov(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_X)(y-\mu_Y)f(x,y)dxdy$$

For diskret $X$ og $Y$:

$$Cov(X,Y) = \sum_{\forall x}\sum_{\forall y}(x-\mu_X)(y-\mu_Y)f(x,y)$$

## Viktige omgrep

- Forventningsverdi
- Varians / standard avvik
- Kovarians / korrelasjon

## Viktige reknereglar

Forventning til lineærkombinasjon:

$$E(a_0+a_1X_1+\ldots a_nX_n) = a_0+a_1E(X_1)+\cdots+a_nE(X_n)$$

Varians til lineærfunksjon:

$$Var(a+bX_1) = b^2 Var(X_1)$$