

Kap 7: Funksjonar av stokastiske variable

- Transformasjon av variable
- Moment
- Momentgenererende funksjon

Notat: Ordningsvariable og ekstremvariable

- Ordnings variable
- Maksimum
- Minumum

Teorem 7.1

La X vere ein kontinuerleg stokastisk variabel med sannsynsfordeling $f(x)$. La $Y = u(X)$, ein 1-1 transformasjon mellom X og Y , slik at $y = u(x)$ gjev $x = w(y) = u^{-1}(y)$. Sannsynsfordelinga til Y er då

$$g(y) = f[w(y)]$$

Teorem 7.2 og 7.3

La X vere ein kontinuerleg stokastisk variabel med sannsynsfordeling $f(x)$. La $Y = u(X)$, ein 1-1 transformasjon mellom X og Y , slik at $y = u(x)$ gjev $x = w(y) = u^{-1}(y)$. Sannsynsfordelinga til Y er då

$$g(y) = f[w(y)]|J|$$

der J er Jacobianen til transformasjonen.

For ein-dimensjonal X er $J = w'(y)$

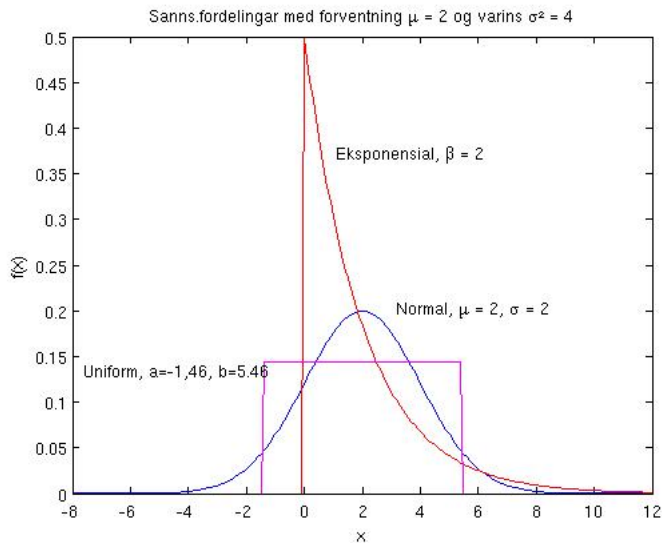
Teorem 7.5

La X vere ein kontinuerleg stokastisk variabel med sannsynsfordeling $f(x)$. La $Y = u(X)$, definere ein transformasjon som ikkje er 1-1. Dersom intervallet X er definert over kan delast opp i k parvis disjunkte intervall, s.a. kvar av inversfunksjonane $x_k = w_k(y)$ definerer ein 1-1 transformasjon. Då er

$$g(y) = \sum_{i=1}^k f[w_i(y)] |J_i|$$

der $J_i = w'_i(y)$ for $i = 1, 2, \dots, k$.

Felles forventning og varians



Def. 7.1: Moment om origo

Det r -te momentet om origo til ein stokastisk variabel X er gjeve ved;

$$\mu'_r = E(X^r) = \begin{cases} \sum xf(x) & \text{for diskret } X \\ \int xf(x)dx & \text{for kontinuierleg } X \end{cases}$$

Moment om origo og sentralmoment

Def. 7.1: Moment om origo

Det r -te momentet om origo til ein stokastisk variabel X er gjeve ved;

$$\mu'_r = E(X^r) = \begin{cases} \sum xf(x) & \text{for diskret } X \\ \int xf(x)dx & \text{for kontinuerleg } X \end{cases}$$

Sentralmoment

Det r -te sentralmomentet (momentet) til ein stokastisk variabel X med $E(X) = \mu$ er;

$$\mu_r = E((X - \mu)^r) = \begin{cases} \sum (x - \mu)f(x) & \text{for diskret } X \\ \int (x - \mu)f(x)dx & \text{for kontinuerleg } X \end{cases}$$

Definisjon 7.2

Den momentgenererende funksjonen $M_X(t)$ til ein stokastisk variabel X er gjeve ved $E[\exp(tX)]$;

- $M_X(t) = E(\exp(tX)) = \sum_{\forall x} f(x) \exp(tx)$
- $M_X(t) = E(\exp(tX)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(tx) dx$

Teorem 7.6

La X vere ein stokastisk variabel med momentgenererende funksjon $M_X(t)$. Då er r -te moment

$$\mu'_r = \left. \frac{d^r M_X(t)}{dt^r} \right|_{t=0}$$

Teorem 7.7

La X og Y vere stokastiske variable med momentgenererende funksjonene hhv $M_X(t)$ og $M_Y(t)$.

$M_X(t) = M_Y(t) \Rightarrow X$ og Y har identisk sannsynsfordeling.

Teorem 7.7

La X og Y vere stokastiske variable med momentgenererende funksjonene hhv $M_X(t)$ og $M_Y(t)$.

$M_X(t) = M_Y(t) \Rightarrow X$ og Y har identisk sannsynsfordeling.

Teorem 7.8 og 7.9

- $M_{X+a}(t) = e^{at} M_X(t)$.
- $M_{aX}(t) = M_X(at)$.

Teorem 7.7

La X og Y vere stokastiske variable med momentgenererende funksjonar hhv $M_X(t)$ og $M_Y(t)$.

$M_X(t) = M_Y(t) \Rightarrow X$ og Y har identisk sannsynsfordeling.

Teorem 7.8 og 7.9

- $M_{X+a}(t) = e^{at} M_X(t)$.
- $M_{aX}(t) = M_X(at)$.

Teorem 7.10

La $X_1, X_2, \dots, X_n$ vere uavhengige stokastiske variable med momentgenererende funksjonar hhv. $M_{X_1}(t), M_{X_2}(t), \dots, M_{X_n}(t)$.

La $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Då er

$$M_Y(t) = M_{X_1}(t) \cdot M_{X_2}(t) \dots M_{X_n}(t)$$

Teorem 7.11

La $X_1, X_2, \dots, X_n$ vere *uavhengige* normalfordelte variable med $E(X_i) = \mu_i$ og $\text{Var}(X_i) = \sigma_i^2$.

La

$$Y = a_0 + a_1X_1 + \dots + a_nX_n.$$

Då er

$$y \sim N(a_0 + a_1\mu_1 + \dots + a_n\mu_n, a_1^2\sigma_1^2 + \dots + a_n^2\sigma_n^2)$$

Kap. 7: Funksjonar av stokastiske variable

- Transformasjon av variable
 - Diskret
 - Kontinuerleg (1-1 transformasjon)
- Moment

Teng meir enn forventning og varians for å beskrive sannsynsfordeling
- Momentgenererende funksjon (*for å finne fordeling til lineærtransformasjon*)

Teorem 7.11

La $X_1, X_2, \dots, X_n$ vere *uavhengige* normalfordelte variable med $E(X_i) = \mu_i$ og $Var(X_i) = \sigma_i^2$.

La $Y = a_0 + a_1X_1 + \dots + a_nX_n$. Då er

$$y \sim N(a_0 + a_1\mu_1 + \dots + a_n\mu_n, a_1^2\sigma_1^2 + \dots + a_n^2\sigma_n^2)$$

La $X_1, X_2, \dots, X_n$ vere uavhengige identisk fordelte (uif) stokastiske variable med

$$X_i \stackrel{uif}{\sim} f(x) \text{ for } i = 1, 2, \dots, n$$

Ordner / sorterer X_i -ane. Får då

- $X_{(1)} = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$
- $X_{(n)} = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$
- Median

$$\tilde{X} = \begin{cases} X_{(\frac{n+1}{2})} & \text{dersom } n \text{ oddetal} \\ \frac{1}{2}(X_{(\frac{n}{2})} + X_{(\frac{n+2}{2})}) & \text{dersom } n \text{ partal} \end{cases}$$

Kva er fordelinga til desse?

Eit kollektivkjøkken har $n = 5$ lyspærer. Desse har uavhengige eksponensialfordelte levetider, med forventa levetid på 1000 timar. Ingen skifter lyspærer.

- Kva er sannsynet for at kjøkkenet er mørkt etter 100 dagar.
- Kva er sannsynsfordelinga til mørkleggingstidspunktet.

- X_i : Levetid for lyspære i .
- $X_i \sim f_X(x) = \frac{1}{\beta} \exp(-x/\beta)$ for $i = 1, 2, \dots, 5$.
- $\beta = 1000$ (i eksponensialfordeling: $E(X) = \beta$).
- Kummulativfordeling for levetida for ei lyspære:
 $F_X(x) = 1 - \exp(-x/\beta)$
- $V =$ levetida til 'lys på kjøkkenet' $= \max\{X_1, X_2, \dots, X_5\}$.