**Norges teknisk-
naturvitenskapelige universitet
NTNU**

**Institutt for
matematiske fag**

**Fakultet for informasjonsteknologi,
matematikk og elektroteknikk**

Besøksadresse

Telefon
Telefax

Supplement til læreboka i TMA4240 Statistikk, høsten 2003

Ordningsvariable og ekstremvariable

Fordelingen til ordningsvariable

La $X_1, X_2, \ldots, X_n$ være uavhengige, identisk fordelte stokastiske variable med kumulativ fordelingsfunksjon $F_X(x) = P(X \leq x)$. Vi ordner X_i-ene etter størrelse og betegner dem $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$, hvor $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$. Dette kalles ordningsvariable. Spesielt er

$$\begin{aligned} X_{(1)} &= \min(X_1, X_2, \ldots, X_n) \\ X_{(n)} &= \max(X_1, X_2, \ldots, X_n) \end{aligned}$$

og disse kalles ekstremvariable. Medianen er definert ved:

$$\tilde{X} = \begin{cases} = X_{((n+1)/2)} & \text{hvis } n \text{ er oddetall} \\ \frac{1}{2}(X_{(n/2)} + X_{(n/2+1)}) & \text{hvis } n \text{ er partall} \end{cases}$$

Variasjonsbredden ("range" på engelsk) er definert ved: $X_{(n)} - X_{(1)}$.

Fordelingen til $V = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ kan finnes ved å benytte at den største av X_i-ene er mindre enn eller lik v hvis og bare hvis alle X_i-ene er mindre enn eller lik v:

$$\begin{aligned} F_V(v) = P(V \leq v) &= P(\max(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leq v) \\ &= P((X_1 \leq v) \cap (X_2 \leq v) \cap \ldots \cap (X_n \leq v)) \\ &\overset{uavh.}{=} P(X_1 \leq v) \cdot P(X_2 \leq v) \cdots P(X_n \leq v) \\ &= [F_X(v)]^n \end{aligned}$$

Hvis X er kontinuerlig fordelt blir:

$$f_V(v) = \frac{d}{dv} F_V(v) = n[F_X(v)]^{n-1} f_X(v)$$

Fordelingen til $U = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ blir på tilsvarende måte:

$$\begin{aligned}
F_U(u) = P(U \leq u) &= P(\min(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leq u) \\
&= 1 - P(\min(X_1, X_2, \ldots, X_n) > u) \\
&= 1 - P((X_1 > u) \cap (X_2 > u) \cap \ldots \cap (X_n > u)) \\
&\overset{uavh.}{=} 1 - P(X_1 > u) \cdot P(X_2 > u) \cdots P(X_n > u)) \\
&= 1 - [1 - F_X(u)]^n
\end{aligned}$$

Hvis X er kontinuerlig fordelt blir:

$$f_U(u) = \frac{d}{du} F_U(u) = n[1 - F_X(u)]^{n-1} f_X(u)$$

Fordelingen til $X_{(k)}$ blir

$$F_{X_{(k)}}(x) = P(k \text{ eller flere } X_i\text{-er er} \leq x) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} [F_X(x)]^j [1 - F_X(x)]^{n-j}$$

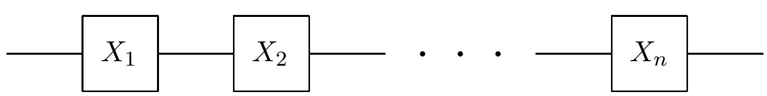
fordi antallet $X_i \leq x$ er binomisk fordelt med parametre n og $F_X(x)$.

Sannsynlighetstettheten finnes ved å derivere m.h.p. x og etter noe mellomregning kan den skrives:

$$f_{X_{(k)}}(x) = n \binom{n-1}{k-1} [F_X(x)]^{k-1} [1 - F_X(x)]^{n-k} f_X(x)$$

Eksempel: Seriesystem og parallellsystem

La oss se på levetiden til et system sammensatt av komponenter med uavhengige levetider. I første omgang ser vi på et system som funksjonerer hvis og bare hvis samtlige komponenter funksjonerer. Dette kan illustreres ved en seriekopling:



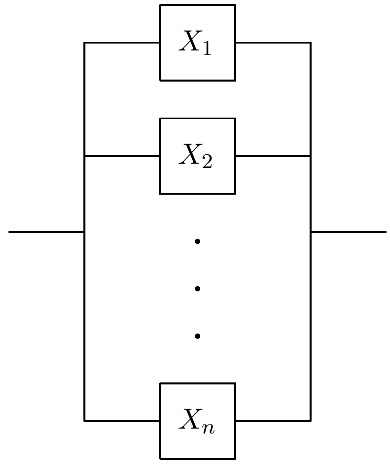
La X_i være levetiden til komponent nr i. Systemet funksjonerer frem til første komponent svikter. Da er levetiden til systemet $U = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

I systemer eller delsystemer der det stilles høye krav til at systemet skal funksjonere koples ofte komponenter i parallell:

Systemet funksjonerer så lenge minst en av komponentene funksjonerer. Levetiden til systemet blir $V = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Seriesystem: La $X_1, X_2, \ldots, X_n$ være uavhengige, eksponensialfordelte levetider med parameter λ. Dvs $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ for $x \geq 0$, $\lambda > 0$. Fordelingen til $U = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ blir:

$$F_U(u) = P(U \leq u) = P(\min(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leq u)$$



$$
\begin{aligned}
&= 1 - P(\min(X_1, X_2, \ldots, X_n) > u) \\
&= 1 - P((X_1 > u) \cap (X_2 > u) \cap \ldots \cap (X_n > u)) \\
&\overset{uavh.}{=} 1 - P(X_1 > u) \cdot P(X_2 > u) \cdots P(X_n > u)) \\
&= 1 - [1 - F_X(u)]^n \\
&= 1 - [1 - \int_0^u f_X(x)dx]^n \\
&= 1 - [1 - \int_0^u \lambda e^{-\lambda x} dx]^n \\
&= 1 - [1 - (1 - e^{-\lambda u})]^n \\
&= 1 - e^{-n\lambda u} \qquad \text{for } x > 0
\end{aligned}
$$

Altså er levetiden til seriesystemet eksponensialfordelt med parameter $n\lambda$.

Oppgaver

Oppgave 1. Betrakt et parallellsystem av 2 uavhengige komponenter. Levetiden til hver komponent er eksponensialfordelt med parameter λ, dvs

$$
F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{for } x \geq 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}
$$

La V være levetiden til systemet. Finn fordelingen til V, samt $\mathrm{E}(V)$.

Oppgave 2. Betrakt et seriesystem sammensatt av n komponenter. Levetiden til hver komponent følger en fordeling med kumulativ fordelingsfunksjonen

$$
F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-(\lambda x)^\alpha} & \text{for } x \geq 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}
$$

hvor $\lambda > 0$ og $\alpha > 0$. Dette kalles en Weibull-fordeling med skalaparameter λ og formparameter α. (Parametriseringen er litt anderledes enn i læreboka.)

Finn den kumulative fordelingsfunksjonen for levetiden til systemet. Hva kalles denne sannsynlighetsfordelingen?