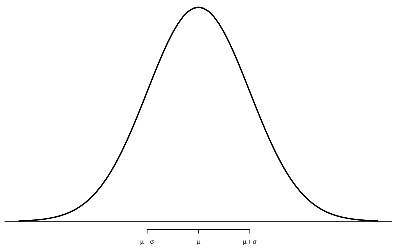
Kapittel 9: Estimering

TMA4240 Statistikk (F2 og E7)

9.4,9.5,9.6 + 8.7: Konfidens- og prediksjonsintervall.
Foreleses 18. oktober, 2004.



6.8 Kjikvadrat fordelingen

DEF En kontinuerlig stokastisk variabel X er kji-kvadrat fordelt parametere ν (kalt frihetgrader), hvis sannsynlighetstettheten er gitt ved

$$f(x;\nu) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)} x^{\nu/2-1} e^{-x/2}, & x > 0 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

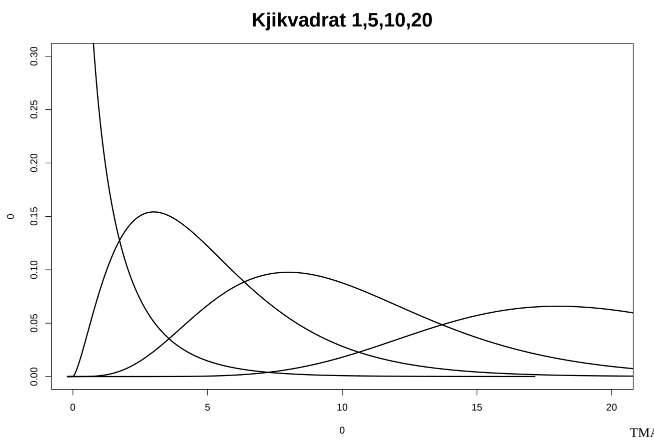
hvor ν er et positivt heltall.

Kji-kvadrat vs. gamma: Kji-kvadrat er gamma med $\alpha = \nu/2$ og $\beta = 2$.

Kjikvadrat fordelingen (forts.)

Forventing og varians i kji-kvadrat fordelingen er

$$\mu = E(X) = \nu \qquad \sigma^2 = \text{Var}(X) = 2 \cdot \nu$$



8.7 t-fordeling

TEO 8.5: La Z være en standard normalfordelt stokastisk variabel og V være en kjikvadrat-fordelt stokastisk variabel med ν frihetsgrader. Hvis Z og V er uavhengige er fordelingen til den stokastiske variablen T

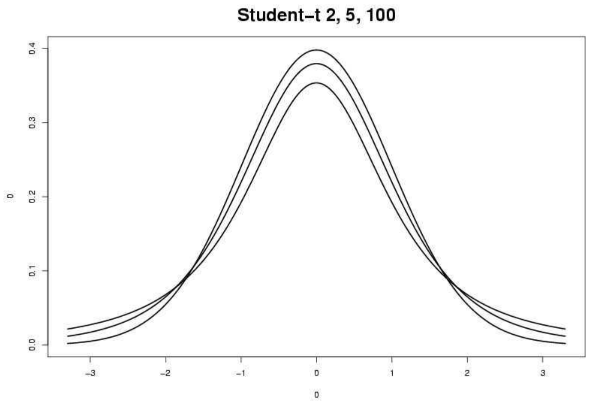
$$T = \frac{Z}{\sqrt{V/\nu}}$$

gitt ved sannsynlighetstettheten

$$h(t) = \frac{\Gamma[(\nu+1)/2]}{\Gamma(\nu/2)\sqrt{\pi\nu}}(1 + \frac{t^2}{\nu})^{-(\nu+1)/2}$$

for $-\infty < t < \infty$. Denne fordelingen har navnet (Student) $t-$fordelingen med ν frihetsgrader.

t-fordelingen



t-fordeling (forts.)

COR: La $X_1, X_2, \ldots, X_n$ være uavhengige stokastiske variabler som alle er normalfordelte med samme forventning μ og samme standardavvik σ. La

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n} \qquad \text{og} \qquad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

Da er den stokastiske variablen

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

t-fordelt med $\nu = n - 1$ frihetsgrader.

Oppg.2, Eksamen August 2000 (modifisert)

X og Y er uavhengige og normalfordelte variable med

$$E(X) = \mu, E(Y) = \mu, \mathrm{Var}(X) = \sigma_0^2, \mathrm{Var}(Y) = \tau_0^2$$

der σ_0^2 og τ_0^2 er kjente størrelser.

Ta utgangspunkt i estimatoren

$$\hat{\mu} = \frac{\tau_0^2 X + \sigma_0^2 Y}{\tau_0^2 + \sigma_0^2}$$

og utled et $(1 - \alpha)100\%$ konfidensintervall for μ.