

Kapittel 2: Sannsynlighet [2.3-2.5]

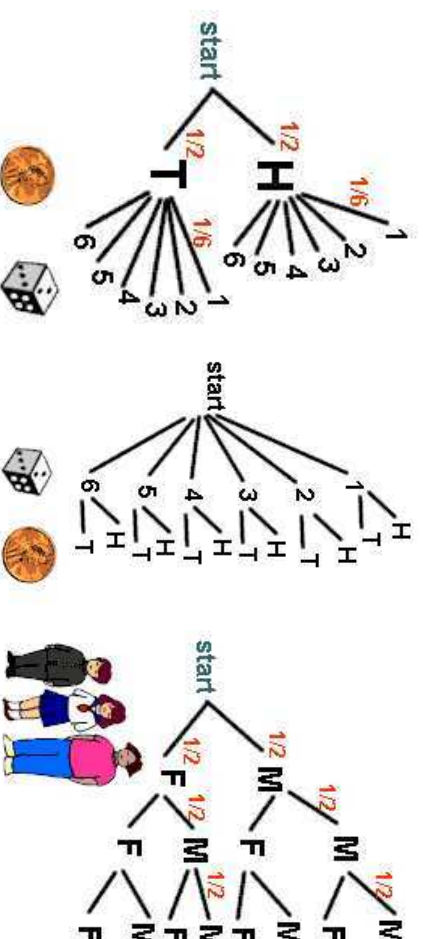
TMA4240 Statistikk (F2 og E7)

2.3, 2.4, 2.5: Kombinatorikk og sannsynlighet [18.august 2004]



Olav.Petter.Lodoeen@math.ntnu.no – p.1/20

Produktregel for valgprosess



TEO 2.1 Produktregel: Hvis en operasjon kan utføres på n_1 måter, og for hver av disse en annen operasjon kan utføres på n_2 måter, så kan de to operasjonene utføres på $n_1 n_2$ måter.

TEO 2.2 Den generaliserte produktregel: En valgprosess har k trinn. I det første trinnet er det n_1 valgmuligheter, i det andre trinnet er det n_2 muligheter, ..., i det siste trinnet er et n_k muligheter. Da er det tilsammen $n_1 n_2 \dots n_k$ valgmuligheter.

Kombinatorikk

- På hvor mange måter kan man trekke r elementer fra n når trekningen skjer med/uten tilbakelegging når ordningen betyr/ikke betyr noe?

	ordnet	ikke-ordnet
med tilbakelegg.	?	ikke pensum
uten tilbakelegg.	?	?

Permutasjoner

DEF 2.7 Permutasjon: En permutasjon er en ordning av alle, eller en delmengde av alle elementer.

TEO 2.3: n elementer kan ordnes i rekkefølge på $n!$
 $= n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ måter.

TEO 2.5: n elementer kan ordnes i rekkefølge i en sirkel på $(n - 1)! = (n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ måter.

Ordnete utvalg

MED tilbakelegging: Fra en mengde med n elementer kan vi lage $n \cdot n \cdots n = n^r$ ordnede utvalg på r elementer når utvelgingen skjer med tilbakelegging.

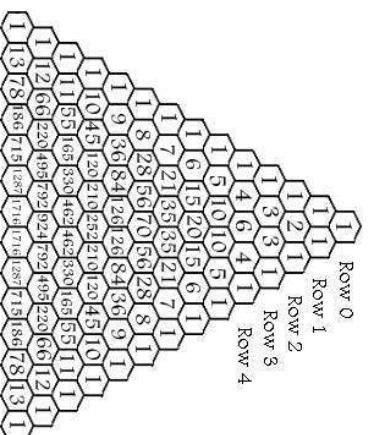
UTTEN tilbakelegging, TEO 2.4: Fra en mengde med n elementer kan vi lage $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots (n - r + 1) \equiv_n P_r$ ordnede utvalg på r elementer nå utvelgingen skjer uten tilbakelegging.

Ikke-ordnede utvalg

TEO 2.8 Uordnet utvalg uten tilbakelegging: Fra en mengde med n elementer kan vi lage $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = {}_n C_r$ uordnede utvalg på r elementer når utvelgingen skjer uten tilbakelegging.

Binomisk koeffisient og Pascals trekant

- Binomisk koeffisient: $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$.



- $\binom{n}{r}$ finnes i rad n på plass r .

Ikke-ordnede utvalg i r celler

- Generalisering av ikke-ordnede utvalg i 2 celler (de r vi har valgt og de $(n - r)$ vi ikke har valgt).

TEO 2.7: Vi kan dele en mengde med n elementer inn i r celler med n_1 elementer i første celle, n_2 elementer i andre celle, ..., og n_r elementer i r te celle, på $\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}$ måter, der $n = n_1 + n_2 + \dots + n_r$.

TEO 2.6: Antall ordninger av n objekter, der n_1 er av type 1, n_2 er av type 2, ... og n_k er av type k , er $\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$. (Sier det samme som TEO 2.7).

Multinomisk koeffisient: $\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r}$

Oppsummering kombinatorikk

- På hvor mange måter kan man trekke r elementer fra n når trekningen skjer med/uten tilbakelegging når ordningen betyr/ikke betyr noe?

	ordnet	ikke-ordnet
med tilbakelegg.	n^r	ikke pensum
uten tilbakelegg.	$\frac{n!}{(n-r)!} = {}_n P_r$	$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = {}_n C_r$

Kombinatorikk

$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ er antall måter å permutere (ordne) n elementer.

$${}_n P_r = \frac{n!}{(n-r)!} = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-r+1) \text{ er antall ordnede utvalg når } r \text{ elementer}$$

velges blant n uten tilbakelegging.

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{{}_n P_r}{r!} = {}_n C_r \text{ er antall ikke-ordnede utvalg når } r \text{ elementer velges}$$

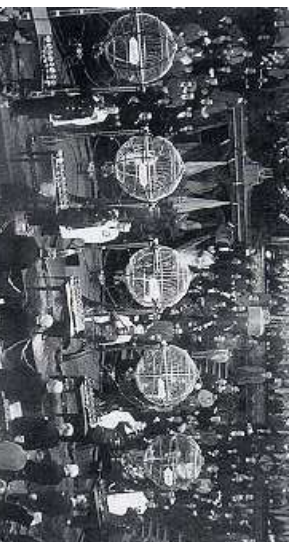
blant n uten tilbakelegging.

Eksamen november 2001, 1a

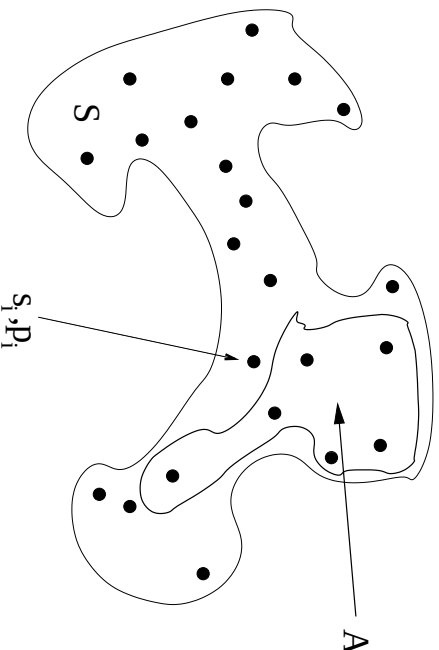
- I denne oppgaven skal vi analysere to forskjellige aspekter ved lottotipping.
- I lotto spiller en deltagere en enkeltrekke ved å velge 7 av 34 tall. Det er også tillatt å

spille system. Når en deltagere spiller system velger deltageren ut m av 34 tall, hvor m betegner antall tall i systemet. Når en deltagere spiller et system av størrelse m , vil antall enkeltrekker som spilles være lik antall mulige kombinasjoner av 7 tall blant de m tallene i systemet.

1. Hvor mange enkeltrekker spilles i et system som inneholder 8 tall?
2. Hvor mange enkeltrekker spilles i et system som inneholder m tall?
3. Når en leverer inn en lottokupong, må en betale kr 3,- per enkeltrekke som spilles. Hvor mye koster det å levere inn et system med 12 tall? (Dette er det største systemet som er tillatt av Norsk Tipping.)



2.4 Sannsynlighet for hendelse



DEF 2.8 (modifisert) Et sannsynlighetsmål, P , på et utfallsrom, S , er en reell funksjon definert på hendelser i S , slik at

- $0 \leq P(A) \leq 1, A \in S$
- $P(S) = 1$
- $P(\emptyset) = 0$

TM/A4240 (F2 og E7): 2.3-2.5 – p.11/20

2.4 Sannsynlighet for hendelse

TEOREM 2.9 Hvis resultatet av et eksperiment er ett av N like sannsynlige utfall (uniform sannsynlighetsmodell), og hvis nøyaktig n av disse gir hendelsen A , så er sannsynligheten til A

$$P(A) = \frac{n}{N} = \frac{\text{antall gunstige utfall for } A}{\text{antall mulige utfall}}$$

TM/A4240 (F2 og E7): 2.3-2.5 – p.12/20

2.4 Sannsynlighet for hendelse

- Kast to terninger

	Første terning					
	1	2	3	4	5	6
1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
Andre terning						
3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

- Merk av i tabellen over og fi nn sannsynligheten for følgende hendelser:

- A : samme antall øyne for begge terninger
- B : sum antall øyne ≥ 10
- C : minst en sekser

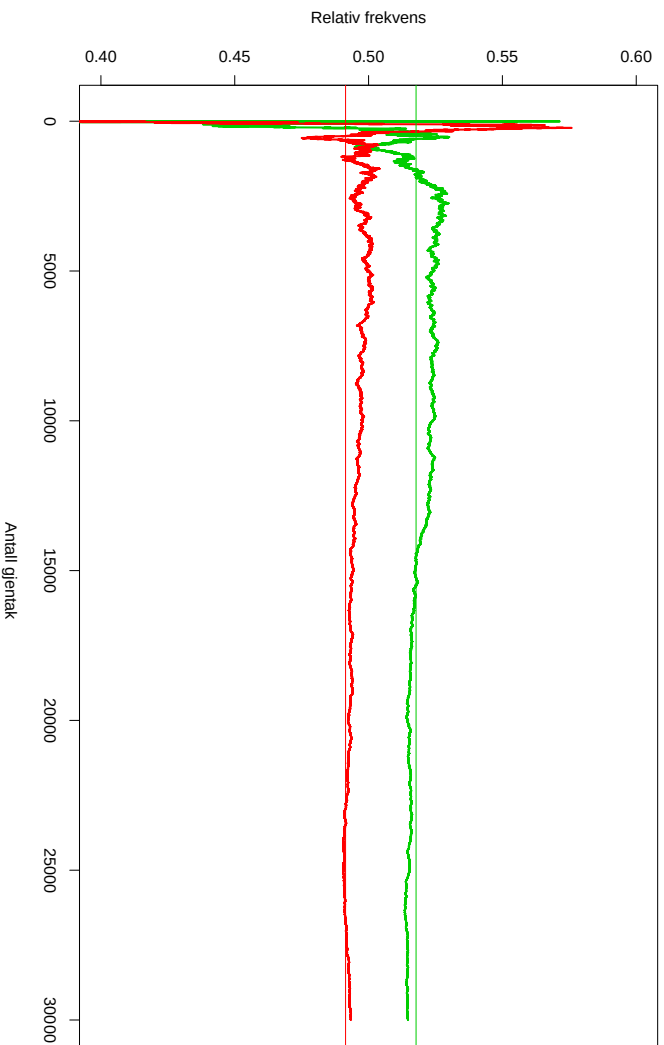
Alternativt om sannsynlighet

- Sannsynlighet kan være en subjektiv betraktning.
 - Sannsynligheten for at RBK vinner serien i 2004.
 - Sannsynligheten for at du står til eksamen i TMA4240.
- Relativ frekvens konvergerer mot sannsynlighet
 - Chevalier de Mere's problem: er det mer sannsynlig å få
 - minst en sekser i fi re kast med en terning, eller
 - minst en dobbel-sekser i 24 kast med to terninger?
 - de Mere mente (fra empiriske data) at 1) var større enn 2).



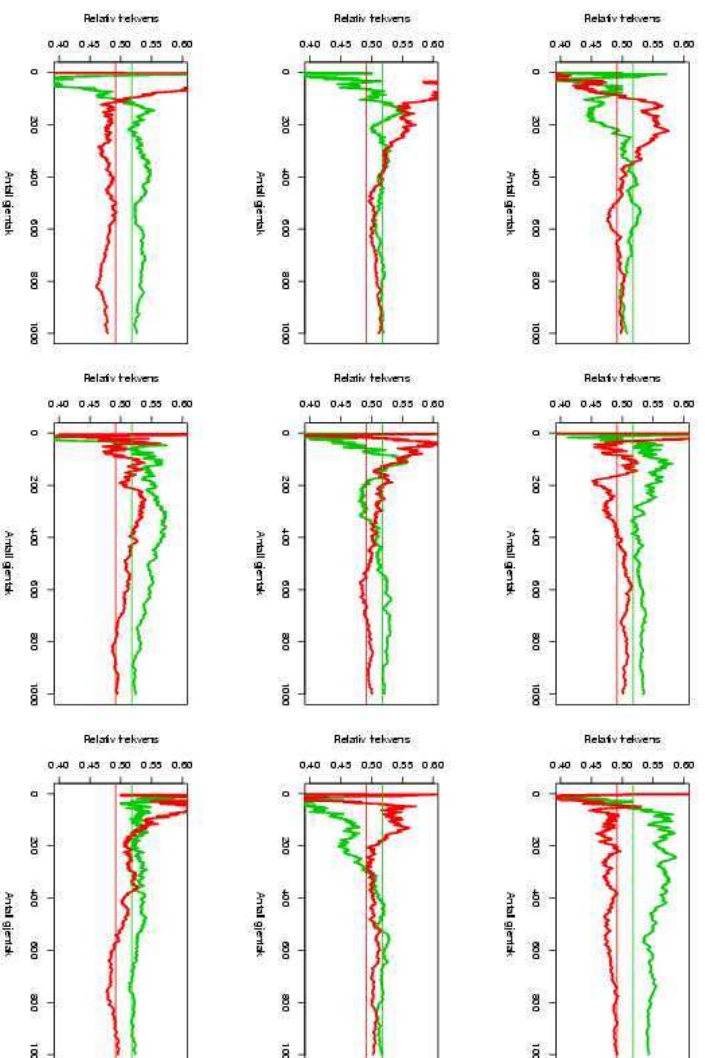
deMere: relativ frekvens

- minst en sekser i fi re kast med en terning
- minst en dobbel-sekser i 24 kast med to terninger



TMA4240 (F2 og E7): 2.3-2.5 – p.15/20

deMere: ulike startpunkt

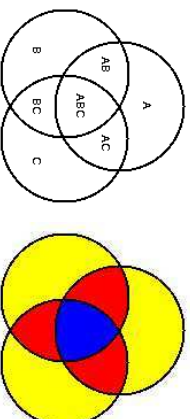


TMA4240 (F2 og E7): 2.3-2.5 – p.16/20

2.5 Addisjonsregler

TEO 2.11: Hvis A, B og C er tre hendelser, så er

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) \\ &\quad - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\ &\quad + P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$



3 Noen resultater og definisjoner

Addisjonsetningen

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup \dots \cup A_n) &= \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i < j < k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots \\ &\quad + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap \dots \cap A_n). \end{aligned}$$

Disjunkte hendelser

TEO 2.10: Hvis A og B er to hendelser, så er

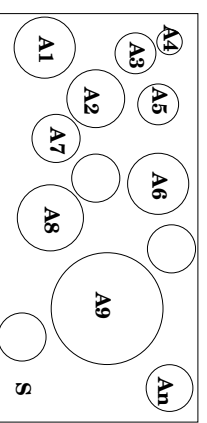
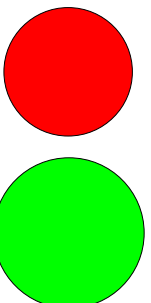
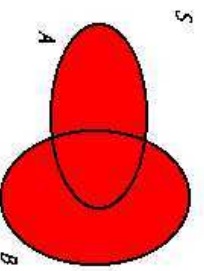
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Korrolar 1: Hvis A og B er disjunkte er

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Korrolar 2: Hvis $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ er disjunkte hendelser, så er

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) &= \\ P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) \end{aligned}$$



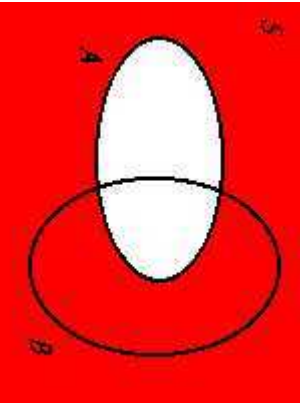
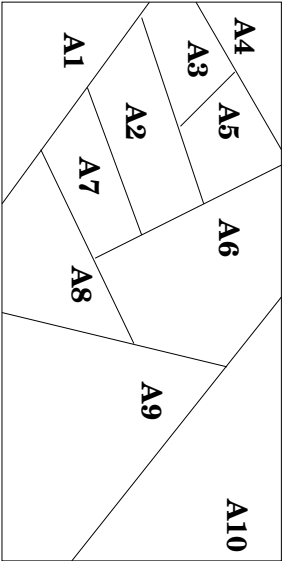
Partisjon av utfallsrommet

Korrolar 3: Hvis $A_1, A_2, \dots, A_n$ er en partisjon av utfallsrommet S , da er

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = P(S) = 1$$

TEO 2.12: Hvis A og A' er komplementære hendelser, så er

$$P(A) + P(A') = 1$$



2.5 Addisjonsregler

Fortsettelse: kast to terninger

	Første terning					
	1	2	3	4	5	6
1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
Andre terning	3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5
4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

Følgende hendelser er defn nert:

- A : samme antall øyne for begge terninger, $P(A) = \frac{1}{6}$
- B : sum antall øyne ≥ 10 , $P(B) = \frac{1}{6}$
- C : minst en sekser, $P(C) = \frac{11}{36}$

Finnsannsynligheten for

- $A \cup B$: samme antall øyne og/eller sum ≥ 10
- $A \cup B \cup C$: samme antall øyne og/eller sum ≥ 10 og/eller minst en sekser.