TMA4245 Statistikk
våren 2004

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag - Øving 5

Avsnitt 5.4

Oppgave 5.4.6

Vi har 9 studenter, og plukker ut 5 av disse som må vise ID. Totalt er det 4 av de 9 studentene som er mindreårige. Vi lar så

$$X = \text{antall mindreårige studenter blandt de 5 som blir plukket ut.}$$

Da er X hypergeometrisk fordelt med N=9, n=5 og k=4:

$$P(X=x) = h(x;9,5,4) = \frac{\binom{4}{x}\binom{9-4}{5-x}}{\binom{9}{5}}$$

Sannsynligheten for at 2 mindreårige studenter blir plukket ut, og dermed blir nektet å kjøpe alkoholholdige drikkevarer, er dermed gitt ved

$$P(X=2) = \frac{\binom{4}{2}\binom{9-4}{5-2}}{\binom{9}{5}} = \frac{\frac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot\frac{5!}{3!\cdot 2!}}{\frac{9!}{5!\cdot 4!}} = \frac{6\cdot 10}{126} = \frac{10}{21} = 0.476$$

Avsnitt 5.6

Oppgave 5.6.4

a) Sannsynligheten for å få mynt for tredje gang i sjuende kast finnes ved negativ binomialfordeling:

$$\mathrm{b}^*(7;3;0.5) = \binom{7-1}{3-1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{7-3} = \frac{15}{128} = 0.1172$$

b) Sannsynligheten for å få mynt for første gang i 4.kast finnes ved geometrisk fordeling:

$$\mathrm{g}\left(4; \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{16} = 0.0625$$

Oppgave 5.6.9

La X være antall feil for en tilfeldig side. Anta at X er Poissonfordelt med parameter $\lambda t = \mu = 2$.

a) Sannsynligheten for å gjøre 4 eller flere feil på neste side blir

$$\begin{aligned} P(X \geq 4) &= 1 - P(X < 4) = 1 - P(X \leq 3) \\ &= 1 - \sum_{x=0}^{3} \frac{2^x}{x!} e^{-2} \overset{\text{tabell}}{=} 1 - 0.8571 = 0.1429 \end{aligned}$$

a) Sannsynligheten for å gjøre ingen feil på neste side blir

$$P(X = 0) = \frac{2^0}{0!} e^{-2} = e^{-2} \overset{\text{tabell}}{=} 0.1353$$

Avsnitt 6.4

Oppgave 6.4.11

$X \sim N(24, 3.8^2)$

a)

$$\begin{aligned} P(X \geq 30) &= 1 - P(X < 30) = 1 - P\left(\frac{X - 24}{3.8} < \frac{30 - 24}{3.8}\right) = 1 - P(Z < 1.58) \\ &= 1 - 0.943 = 0.057 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} P(X \geq 15) &= 1 - P(X < 15) = 1 - P\left(\frac{X - 24}{3.8} < \frac{15 - 24}{3.8}\right) = 1 - P(Z < -2.37) \\ &= 1 - (1 - P(Z < 2.37)) = P(Z < 2.37) = 0.991 \end{aligned}$$

c)

$$P(X \geq 25) = 1 - P(X < 25) = 1 - P\big(\frac{X-24}{3.8} < \frac{25-24}{3.8}\big) = 1 - P(Z < 0.26)$$
$$= 1 - 0.603 = 0.397$$

d)

k = tid til jobben, hvor 15% av turene tar lenger tid.

$P(X \geq k) = 1 - P(X < k) = 1 - P\big(\frac{x-24}{3.8} < \frac{k-24}{3.8}\big) = 1 - P(Z < \frac{k-24}{3.8}) = 0.15$

$P(Z < \frac{k-24}{3.8}) = 0.85$

$\frac{k-24}{3.8} = 1.04 \quad \Rightarrow \quad k = 3.8 \cdot 1.04 + 24 = 27$ min., 57 sek.

e)

Y = antall av 3 neste turer som tar mer enn 30 min.

$p = P(X \geq 30) = 0.057$

$Y \sim \text{bin}(3, 0.057)$

$P(Y = 2) = \binom{3}{2} 0.057^2 (1 - 0.057)^{3-2} = 3 \cdot 0.057^2 \cdot 0.943 = 0.0092$

Oppgave 6.4.13

Gjennomsnittlig levetid: $\mu = 10$ år, standardavvik: $\sigma = 2$ år.

Erstatter alle motorer som svikter i garantiperioden. Vi vil sette garantiperioden slik at 3% må erstattes.

X = levetid for motor. $X \sim N(\mu, \sigma^2) = N(10, 2^2)$.

k = lengde på garantiperioden.

$P(X \leq k) = P(\frac{X-10}{2} \leq \frac{k-10}{2}) = P(Z \leq \frac{k-10}{2}) = 0.03$

$P(Z \leq \frac{k-10}{2}) = 1 - P(Z \leq \frac{10-k}{2})$

$\Rightarrow \quad 1 - P(Z \leq \frac{10-k}{2}) = 0.03 \quad \Rightarrow \quad P(Z \leq \frac{10-k}{2}) = 0.97$

$\Rightarrow \quad \frac{10-k}{2} = 1.88 \quad \Rightarrow k = 6.24$

Må ha garantiperiode på 6.24 år.

Oppgaver fra oppgavesamling

Oppgave 8a

Forsøket kan karaktiseres ved følgende punkter:

- Totalt $a = 8$ enheter i hver eske
- $a\theta = d$ enheter er defekte i hver eske (defekt = type A)
- $n = 2$ enheter velges tilfeldig, uten tilbakelegging

Antall defekte (type A) kalles X. Da sies X å være hypergeometrisk fordelt med parametre (a, θ, n).

$$P(X = x) = \frac{\binom{a\theta}{x}\binom{a - a\theta}{n - x}}{\binom{a}{n}} = \frac{\binom{x \text{ velges}}{\text{blant } a\theta}\binom{n - x \text{ velges}}{\text{blant } a - a\theta}}{\binom{\text{totalt velges}}{n \text{ av } a}}$$

Med $a\theta = d, n = 2, a = 8$:

$$P(X = x) = \frac{\binom{d}{x}\binom{8 - d}{2 - x}}{\binom{8}{2}}$$

a) $p(d) = P$ ("Stikkprøve fra eske med d defekte er feilfri") $= P(X = 0)$

$$\begin{aligned} p(d) = \frac{\binom{d}{0}\binom{8 - d}{2}}{\binom{8}{2}} &= \frac{(8 - d)!6!2!}{2!(8 - d - 2)!8!} \\ = \frac{(8 - d)(7 - d)}{7 \cdot 8} &= \frac{1}{56}\left(56 - 15d - d^2\right), \quad d \leq 8 \end{aligned}$$

d	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$p(d)$	1	0.75	0.536	0.357	0.214	0.107	0.036	0	0

Oppgave 20a

a) X_i, $i = 1, \ldots, n$ uavhengig, identisk fordelte med $E(X_i) = \mu$, $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$.

$a_i, i = 1, \ldots, n$ konstanter.

Veid gjennomsnitt: $Z = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i X_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i}$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(Z) &= \mathrm{E}\left(\frac{\sum_{i=1}^n a_i X_i}{\sum_{i=1}^n a_i}\right) = \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^n a_i}\right)\cdot \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^n a_i(X_i)\right) \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n a_i \mathrm{E}(X_i)}{\sum_{i=1}^n a_i} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i \mu}{\sum_{i=1}^n a_i} = \mu \\
\mathrm{Var}(Z) &= \mathrm{Var}\left(\frac{\sum_{i=1}^n a_i X_i}{\sum_{i=1}^n a_i}\right) = \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^n a_i}\right)^2 \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n a_i^2 \,\mathrm{Var}(X_i)}{(\sum_{i=1}^n a_i)^2} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{(\sum_{i=1}^n a_i)^2}\sigma^2
\end{aligned}
$$

$a_i = a$ for alle i (tilsvarer "vanlig" gjennomsnitt):

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(Z) \text{ uavhengig av } a_i \Rightarrow \quad & \mathrm{E}(Z) = \mu \\
\mathrm{Var}(Z) = \frac{\sum_{i=1}^n a^2}{(\sum_{i=1}^n a)^2}\sigma^2 = \frac{na^2}{(na)^2}\sigma^2 &= \frac{\sigma^2}{n}
\end{aligned}
$$

Oppgave 45

N: Antall trykkfeil i et manuskript på s sider. $N \sim \text{Poisson}(\lambda s)$

$P(N = n) = \frac{(\lambda s)^n}{n!} e^{-\lambda s}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

Korrekturleser oppdager hver trykkfeil med sannsynlighet p. X: antall feil korrekturleseren finner.

$P(X = x|N = n) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \qquad x = 0, 1, \ldots, n$

a)

For at antakelsen om at $X|N = n$ er binomisk fordelt skal være rett, må vi ha at alle feil oppdages uavhengig av hverandre.

$\lambda = 2$, $s = 8$, gir $N \sim \text{Poisson}(16)$.

$P(N > 10) = 1 - P(N \leq 10) = 1 - \sum_{i=0}^{10} \frac{16^i}{i!} e^{-16} = 1 - 0.0774 = 0.923$

Antar at $n = 12$, $p = 0.6$. Det gir $X|N \sim \text{bin}(12, 0.6)$

$$
\begin{aligned}
P(\text{Korrekturleser finner alle feil}) =& P(X = 12|N = 12) \\
= \binom{12}{12} 0.6^{12}(1-0.6)^{12-12} = 0.6^{12} =& 0.002
\end{aligned}
$$

b) La Y_k betegne antall feil etter at korrekturleseren har lest manuskriptet k uavhengige ganger. ($k = 1, 2, \ldots$).

$Y_1|N = n \sim \text{bin}(n, 1-p)$

$P(Y_1 = y|N = n) = \binom{n}{y} (1-p)^y p^{n-y}, \qquad x = 0, 1, \ldots, n$

Simultanfordelingen til Y_1 og N:

$$\begin{aligned} P(Y_1 = y, N = n) =& P(Y_1 = y | N = n) P(N = n) \\ =& \binom{n}{y} (1-p)^y p^{n-y} \frac{(\lambda s)^n}{n!} e^{-\lambda s} = \binom{n}{y} (\frac{1-p}{p})^y \frac{(p\lambda s)^n}{n!} e^{-\lambda s} \end{aligned}$$

for $n = 0, 1, \ldots$ og $y = 0, 1, \ldots, n$, og 0 ellers.

Marginalfordeling til Y_1:

$P(Y_1 = y) = \sum_{n=0}^{\infty} P(Y_1 = y, N = n)$

Har at $P(Y_1 = y, N = n) = 0$ for $n < y$.

$$\begin{aligned} P(Y_1 = y) =& \sum_{n=y}^{\infty} P(Y_1 = y, N = n) = \sum_{n=y}^{\infty} \binom{n}{y} (\frac{1-p}{p})^y \frac{(p\lambda s)^n}{n!} e^{-\lambda s} \\ =& (\frac{1-p}{p})^y e^{-\lambda s} \sum_{n=y}^{\infty} \frac{n!}{(n-y)!y!} \frac{(p\lambda s)^n}{n!} = (\frac{1-p}{p})^y e^{-\lambda s} \sum_{n=y}^{\infty} \frac{(p\lambda s)^n}{(n-y)!y!} \\ \overset{k=n-y}{=}& (\frac{1-p}{p})^y \frac{1}{y!} e^{-\lambda s} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(p\lambda s)^{k+y}}{k!} = \frac{(\lambda s(1-p))^y}{y!} e^{-\lambda s} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(p\lambda s)^k}{k!} \\ =& \frac{(\lambda s(1-p))^y}{y!} e^{-\lambda s} e^{p\lambda s} = \frac{(\lambda s(1-p))^y}{y!} e^{-\lambda s(1-p)} \qquad y = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Dvs. $Y_1 \sim \text{Poisson}(\lambda s(1-p))$.

Vi har sett at

$N \sim \text{Poisson}(\lambda s)$, $Y_1 | N = n \sim \text{bin}(n, 1-p)$ gir $Y_1 \sim \text{Poisson}(\lambda s(1-p))$.

Y_2: Antall gjenværende feil etter to gjennomlesninger.

$Y_2 | Y_1 = y$ vil da være binomisk fordelt, $Y_2 | Y_1 = y \sim \text{bin}(y, 1-p)$.

Vi har: $Y_1 \sim \text{Poisson}(\lambda s(1-p))$, $Y_2 | Y_1 = y \sim \text{bin}(y, 1-p)$. Sammenligning med resultatet over gir $Y_2 \sim \text{Poisson}(\lambda s(1-p)^2)$.

Videre: $Y_3 | Y_2 = y \sim \text{bin}(y, 1-p)$, $Y_3 \sim \text{Poisson}(\lambda s(1-p)^3)$.

Generelt har vi dermed at $Y_k \sim \text{Poisson}(\lambda s(1-p)^k)$.

Oppgave 65ab

a)

Vekten på en moden kål, $X \sim n(x; 2, 0.5)$

$P(X < 1.5) = P(\frac{X-2}{0.5} < \frac{1.5-2}{0.5}) = \Phi(-1) = 1 - 0.84 = \underline{\underline{0.16}}$

$$\begin{aligned} P(2 < X < 2.5) &= P(X < 2.5) - P(X < 2) \\ &= P(\frac{X-2.5}{0.5} < \frac{2-2.5}{0.5}) - P(\frac{X-2}{0.5} < \frac{2-2}{0.5}) \\ &= \Phi(1) - \Phi(0) \\ &= 0.84 - 0.5 = \underline{\underline{0.34}} \end{aligned}$$

Vi lar Y være differansen mellom to kålhoder X_1 og X_2, $Y = X_1 - X_2$. Da er $Y \sim n(y; 0, \sqrt{2 \cdot 0.5^2})$. Ved symmetri er $P(Y < -1) = P(Y > 1) = 1 - P(Y < 1)$.

$$\begin{aligned} P(Y > 1) + P(Y < -1) &= 2(1 - P(Y < 1)) \\ &= 2(1 - \Phi(\frac{1}{0.5\sqrt{2}})) \\ &= 2(1 - \Phi(1.41)) = 2(1 - 0.92) = \underline{\underline{0.16}} \end{aligned}$$

b)

$P(2 < X < 2.5 | X > 1.5) = \frac{P(2<X<2.5)}{P(X>1.5)} = \frac{0.34}{1-0.16} = \underline{\underline{0.40}}$

Lar så Z være vekten av et klasse 1 kålhode og la $F_X(x)$ være den kumulative fordelingsfunksjonen til X. Vi setter dette inn for $P(X \leq x | X > 1.5)$:

$P(X \leq x | X > 1.5) = \frac{P(1.5<X<x)}{P(X>1.5)} = \frac{P(X<x)-P(X<1.5)}{0.84} = \frac{F_X(x)-0.16}{0.84}$ for $x > 1.5$.

Dvs

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = \begin{cases} \frac{F_X(z)-0.16}{0.84} & \text{for } z > 1.5 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$