Løsningsforslag til prøvemidtveiseksamen
TMA4240 Statistikk H2004

Lagt ut 04.10.2004.

Oppgave	a	b	c	d	e
1					X
2			X		
3		X			
4					X
5			X		
6	X				
7		X			
8				X	
9			X		
10		X			
11		X			
12				X	
13					X
14	X				
15	X				
16					X
17		X			
18	X				
19				X	
20				X	

Oppgave 1 På en tippekupong er det gitt 12 fotballkamper. For hver kamp skal en tippe om det blir hjemmeseier (H), uavgjort (U) eller borteseier (B). En tipperekke består av ett tips for hver av de 12 kampene. Hvor mange forskjellige rekker kan en tippe?

a) 177147 **b)** 1728 **c)** 479001600 **d)** 220 **e)** 531441

Rett svar: e

Fasit: Antall mulige tipperekker er $3^{12} = 531441$.

Oppgave 2 NTNUI (NTNUs idrettslag) skal være med på en stafett der det er åtte etapper. Treneren har bestemt hvilke åtte løpere som skal være med på stafettlaget, men hun har enda ikke bestemt hvilken rekkefølge de skal løpe i. Hvor mange slike rekkefølger er det?

a) 5230 **b)** 36 **c)** 40320 **d)** 20160 **e)** 256

Rett svar: c

Fasit: Antall rekkefølger de kan løpe i er $8! = 40320$.

Oppgave 3 I en eske er det tre pengestykker. Ett av dem er normalt, ett av dem har krone på begge sider, og ett av dem har mynt på begge sider. Du trekker tilfeldig et pengestykke og kaster det to ganger. Da er sannsynligheten for at du får krone i begge kastene lik:

a) $\frac{2}{12}$ **b)** $\frac{5}{12}$ **c)** $\frac{4}{12}$ **d)** $\frac{6}{12}$ **e)** $\frac{3}{12}$

Rett svar: b

Fasit: Vi innfører begivenhetene N=“kaster med normalt pengestykke”, K=“kaster med pengestykke med krone på begge sider”, M=“kaster med pengestykke med mynt på begge sider” og B= “får krone i begge kastene”. Setningen om total sannsynlighet gir da:
$P(B) = P(B\,|\,N) \cdot P(N) + P(B\,|\,K) \cdot P(K) + P(B\,|\,M) \cdot P(M) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$

Oppgave 4 I en eske er det tre pengestykker. Ett av dem er normalt, ett av dem har krone på begge sider, og ett av dem har mynt på begge sider. Du trekker tilfeldig et pengestykke og kaster det to ganger. Tenk deg at du fikk krone i begge kastene. Da er sannsynligheten for at du har kastet med det normale pengestykket lik:

a) $\frac{1}{3}$ **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** $\frac{1}{4}$ **d)** $\frac{1}{6}$ **e)** $\frac{1}{5}$

Rett svar: e

Fasit: Vi innfører de samme begivenhetene som i tidligere oppgave og bruker det resultatet vi fant der.
Da får vi (jf. Bayes setning):

$$P(N\,|\,B) = \frac{P(B\,|\,N) \cdot P(N)}{P(B)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{5}{12}} = \frac{1}{5}$$

Oppgave 5 Hvis A og B er to *uavhengige* hendelser, så er det alltid riktig at:

a) $P(A|B) = P(A)[1 - P(B)]$ **b)** $P(A|B) = P(B)$ **c)** $P(A|B) = P(A)$ **d)** $P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)}$ **e)** $P(A|B) = P(A) \cdot P(B)$

Rett svar: c

Fasit: Dette er definisjonen av uavhengighet.

Oppgave 6 Fra offentlig statistikk har vi at sannsynligheten er:

- 3.0% for at en 75 år gammel kvinne vil dø i løpet av ett år
- 3.4% for at en 76 år gammel kvinne vil dø i løpet av ett år
- 3.9% for at en 77 år gammel kvinne vil dø i løpet av ett år
- 4.5% for at en 78 år gammel kvinne vil dø i løpet av ett år
- 5.0% for at en 79 år gammel kvinne vil dø i løpet av ett år

Hva er sannsynligheten for at en 75 år gammel kvinne vil dø før hun blir 80 år gammel (dvs. at hun ikke vil oppleve sin 80-årsdag)?

a) 0.183 **b)** 0.802 **c)** 0.817 **d)** 0.198 **e)** 0.456

Rett svar: a

Fasit: Produktsetningen gir at sannsynligheten for at kvinnen vil bli minst 80 år er:

$$(1 - 0.030) \cdot (1 - 0.034) \cdot (1 - 0.039) \cdot (1 - 0.045) \cdot (1 - 0.050) = 0.817$$

Sannsynligheten for at hun ikke vil bli minst 80 år er derfor lik $1 - 0.817 = 0.183$.

Oppgave 7 Den kumulative fordelingen til den stokastiske variabelen X er gitt ved

x	0	1	2	3	4	5
$F(x)$	0	0.45	0.70	0.85	0.95	1.00

Da er $E(X)$ lik:

a) 1.00 **b)** 2.05 **c)** 2.35 **d)** 2.50 **e)** 3.00

Rett svar: b

Fasit: Av den kumulative fordelingen finner vi at X har punktsannsynlighet:

k	1	2	3	4	5
$P(X = k)$	0.45	0.25	0.15	0.10	0.05

Forventningsverdien blir:

$E(X) = \sum_{k=1}^{5} k \cdot P(X = k) = 1 \cdot 0.45 + 2 \cdot 0.25 + 3 \cdot 0.15 + 4 \cdot 0.10 + 5 \cdot 0.05 = 2.05$

Oppgave 8 Den kumulative fordelingen til den stokastiske variabelen X er gitt ved

x	0	1	2	3	4	5
$F(x)$	0	0.45	0.70	0.85	0.95	1.00

Da er Var(X) lik:

a) 1.20 **b)** 5.65 **c)** 4.20 **d)** 1.45 **e)** 2.65

Rett svar: d

Fasit: Vi fant punktsannsynligheten til X i forrige oppgave. Vi finner nå:

$E(X^2) = \sum_{k=1}^{5} k^2 \cdot P(X = k) = 1^2 \cdot 0.45 + 2^2 \cdot 0.25 + 3^2 \cdot 0.15 + 4^2 \cdot 0.10 + 5^2 \cdot 0.05 = 5.65$

Dermed er $\text{Var}(X) = E(X^2) - (EX)^2 = 5.65 - 2.05^2 = 1.45$

Oppgave 9 Per er med i en spørrekonkurranse på TV. Han blir stilt 10 spørsmål. For hvert spørsmål kan han velge mellom tre svaralternativ der ett av dem er riktig. Hvis Per svarer riktig på minst 8 spørsmål vinner han 10 000 kroner. Sannsynligheten for at Per vinner 10 000 kroner dersom han bare gjetter er lik:

a) 0.010 **b)** 0.017 **c)** 0.003 **d)** 0.047 **e)** 0.008

Rett svar: c

Fasit: La X være antall riktige svar Per får. Da er X binomisk fordelt med $n = 10$ og $p = 1/3$.

$P(\text{Per vinner 10 000 kroner}) = P(X \geq 8) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)$

$= \binom{10}{8}\left(\frac{1}{3}\right)^8\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \binom{10}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^9\left(\frac{2}{3}\right)^1 + \binom{10}{10}\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 0.00305 + 0.00033 + 0.00002 = 0.0034 \approx 0.003.$

Oppgave 10 I en skoleklasse er det 12 gutter og 8 jenter. Klassen skal velge to representanter til elevrådet. Siden ingen har lyst til å stille til valg, blir de enige om å trekke lodd. Da er sannsynligheten for at det blir valgt én gutt og én jente lik:

a) 0.208 **b)** 0.505 **c)** 0.333 **d)** 0.253 **e)** 0.417

Rett svar: b

Fasit: $\frac{\binom{12}{1}\cdot\binom{8}{1}}{\binom{20}{2}} = 0.505$

Oppgave 11 SMS meldinger blir mottatt ved en basestasjon i henhold til en Poisson prosess med $\lambda = 20$ per minutt. Hva er sannsynligheten for at det blir mottatt minst tre SMS meldinger i løpet av 15 sekunder?

a) 0.140 **b)** 0.875 **c)** 0.999 **d)** 0.250 **e)** 0.742

Rett svar: b

Fasit: La X være antall SMS meldinger som blir mottatt i løpet av 15 sekunder.
Da er X Poisson fordelt med forventningsverdi $\lambda \cdot \frac{15}{60} = 20 \cdot 0.25 = 5$. Dermed er:

$P(\text{minst 3 SMS-meldinger}) = P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) = 1 - e^{-5} - 5 \cdot e^{-5} - \frac{5^2}{2!}e^{-5} = 1 - 0.0067 - 0.0337 - 0.0842 = 0.8754 \approx 0.875$

Oppgave 12 Du kaster en terning gjentatte ganger. Sannsynligheten for at du vil få den første sekseren i det femte kastet er lik:

a) 0.036 **b)** 0.138 **c)** 0.401 **d)** 0.080 **e)** 0.598

Rett svar: d

Fasit: $P(\text{første sekser i femte kast}) = P(\text{ingen sekser i fire kast}) \cdot P(\text{sekser i femte kast}) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot \frac{1}{6} = 0.080$

Oppgave 13 Den stokastiske variabelen X har sannsynlighetstettheten

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{15}{16}(1-x^2)^2 & \text{for } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Da er $P(0 < X < 0.5)$ lik:

a) 0.430 **b)** 0.250 **c)** 0.527 **d)** 0.412 **e)** 0.396

Rett svar: e

Fasit: Vi har at:

$$\begin{aligned} P(0 < X < 0.5) &= \int_0^{0.5} f_X(x)dx = \int_0^{0.5} \frac{15}{16}(1-x^2)^2 dx = \frac{15}{16}\int_0^{0.5}(1 - 2x^2 + x^4)dx \\ &= \frac{15}{16} \cdot \left[x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5\right]_0^{0.5} = \frac{15}{16} \cdot 0.4229 = 0.396 \end{aligned}$$

Oppgave 14 Den stokastiske variabelen X har sannsynlighetstettheten

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{15}{16}(1-x^2)^2 & \text{for } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Da er $\mathrm{Var}(X)$ lik:

a) $\frac{1}{7}$ **b)** $\frac{1}{4}$ **c)** $\frac{15}{16}$ **d)** $\frac{3}{16}$ **e)** $\frac{3}{32}$

Rett svar: a

Fasit: Sannsynlighetstettheten til X er symmetrisk om 0. Da er $E(X) = 0$. Vi får dermed at

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= E(X^2) - (EX)^2 = E(X^2) - 0 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{15}{16}x^2(1-x^2)^2 dx = \frac{15}{16}\int_{-1}^{1}(x^2 - 2x^4 + x^6)dx \\ &= \frac{15}{16} \cdot \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7\right]_{-1}^{1} = \frac{15}{16} \cdot \frac{16}{105} = \frac{1}{7} \end{aligned}$$

Oppgave 15 Den stokastiske variabelen X har kumulativ fordeling

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2x^2} & \text{for } x \geq 0 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Da er medianen i fordelingen lik:

a) 0.589 **b)** 0.347 **c)** 0.173 **d)** 1.000 **e)** 0.443

Rett svar: a

Fasit: Vi finner medianen av ligningen $F_X(x_{0.50}) = \frac{1}{2}$. Det gir:

$$\begin{aligned} 1 - e^{-2x_{0.50}^2} &= \frac{1}{2} \\ e^{-2x_{0.50}^2} &= \frac{1}{2} \\ -2x_{0.50}^2 &= -\log(2) \\ x_{0.50} &= \sqrt{\frac{\log(2)}{2}} = 0.589 \end{aligned}$$

Oppgave 16 Vekten til en nyfødt gutt er normalfordelt med forventningsverdi 3.60 kg og standardavvik 0.50 kg. Sannsynligheten for at en nyfødt gutt vil veie minst fire kg er lik:

a) 0.309 **b)** 0.055 **c)** 0.345 **d)** 0.788 **e)** 0.212

Rett svar: e

Fasit: La X være vekten til en nyfødt gutt.
Vi har $X \sim N(3.60, 0.50^2)$ og $Z = (X - 3.60)/0.50 \sim N(0, 1)$.

$$P(\text{nyfødt gutt vil veie minst 4 kg}) = P(X \geq 4.00) = P\left(\frac{X - 3.60}{0.50} \geq \frac{4.00 - 3.60}{0.50}\right)$$

$$= P(Z \geq 0.80) = 1 - P(Z \leq 0.80) = 1 - 0.7881 \approx 0.212$$

Oppgave 17 Vitalkapasiteten er et mål for en persons lungefunksjon. Den måles ved at en først puster inn så dypt en kan, og så puster ut så mye luft en klarer. Den mengde luft som pustes ut blir målt i et apparat og kalles vitalkapasiteten. For friske 12 år gamle gutter er vitalkapasiteten normalfordelt med forventningsverdi 3.0 liter og standardavvik 0.4 liter.

Når en lege undersøker vitalkapasiteten til en pasient, er hun interessert i om den er vesentlig lavere enn normalt. I så fall kan det være tegn på lungesykdom som må undersøkes nærmere. Vanligvis bestemmes en nedre grenseverdi slik slik at 97.5% av den friske befolkningen ligger over grensen. For tolv år gamle gutter er denne grenseverdien lik:

a) 2.34 liter **b)** 2.22 liter **c)** 2.60 liter **d)** 1.04 liter **e)** 2.10 liter

Rett svar: b

Fasit: La X være vitalkapasiteten til en 12 år gammel gutt.
Vi har $X \sim N(3.0, 0.4^2)$ og $Z = (X - 3.0)/0.4 \sim N(0,1)$. Grensverdien g er gitt ved:

$$0.975 = P(X \geq g) = P\left(\frac{X - 3.0}{0.4} \geq \frac{g - 3.0}{0.4}\right) = P\left(Z \geq \frac{g - 3.0}{0.4}\right)$$

Nå har vi at $P(Z \geq -1.96) = P(Z \leq 1.96) = 0.975$.

Vi bestemmer derfor g ved $\frac{g-3.0}{0.4} = -1.96$, og får grenseverdien $g = 3.0 - 1.96 \cdot 0.4 = 2.216 \approx 2.22$

Oppgave 18 Den stokastiske variabelen X har forventning $\mathrm{E}(X) = \mu$ og varians $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$. Vi ser på en ny stokastisk variabel $Y = 5 \cdot X + 7$. Da er $\mathrm{E}(Y)$ og $\mathrm{Var}(Y)$:

a) $\mathrm{E}(Y) = 5\mu + 7$, $\mathrm{Var}(Y) = 25\sigma^2$ **b)** $\mathrm{E}(Y) = 5\mu$, $\mathrm{Var}(Y) = 25\sigma^2$ **c)** $\mathrm{E}(Y) = 5\mu + 7$, $\mathrm{Var}(Y) = 5\sigma^2 + 7$ **d)** $\mathrm{E}(Y) = 5\mu$, $\mathrm{Var}(Y) = 5\sigma^2$ **e)** $\mathrm{E}(Y) = 5\mu + 7$, $\mathrm{Var}(Y) = 5\sigma^2$

Rett svar: a

Fasit: Forventning: $\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(5X + 7) = 5\mathrm{E}(X) + 7 = 5\mu + 7$ og
varians: $\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(5X + 7) = 5^2\mathrm{Var}(X) = 25\sigma^2$.

Oppgave 19 Den stokastiske variabelen X har sannsynlighetstettheten

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & \text{for } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Da er sannsynlighetstettheten til $Y = e^X$ lik (for $1 \leq y \leq e$):

a) e^{2y} **b)** $(\log y)^2$ **c)** $2e^y$ **d)** $2\log y/y$ **e)** $2\log y$

Rett svar: d

Fasit: Den kumulative fordelingen til Y er (for $1 \leq y \leq e$):

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(e^X \leq y) = P(X \leq \log y) = F_X(\log y)$$

Vi deriverer og får sannsynlighetstettheten til Y (for $1 \leq y \leq e$):

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = F_X'(\log y)\frac{d}{dy}\log y = f_X(\log y)/y = 2\log y/y$$

Evt. bruk transformasjonsformelen direkte.

Oppgave 20 Et lite teknisk system inneholder to komponenter, som fungerer uavhengig av hverandre. Sannsynligheten for at den første komponenten fungerer er 95%, mens sannsynligheten for at den andre komponenten fungerer er 90%. Systemet fungerer hvis minst én av komponentene fungerer. (Vi sier at komponentene er koblet i parallell.) Hva er sannsynligheten for at systemet fungerer?

a) 0.975 **b)** 0.990 **c)** 0.950 **d)** 0.995 **e)** 0.855

Rett svar: d

Fasit: Vi innfører begivenhetene A="første komponent fungerer" og B="andre komponent fungerer". Av opplysningene i oppgaven har vi at $P(A) = 0.95$ og $P(B) = 0.90$.
Addisjonssetningen og det at A og B er uavhengige begivenheter gir nå at:
$P(\text{systemet fungerer}) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$
$= 0.95 + 0.90 - 0.95 \cdot 0.90 = 0.995$
Alternativ løsning via ekstremvariabler: $P(\text{systemet fungerer}) = 1 - P(\text{systemet fungerer ikke}) = 1 - (1 - 0.95) \cdot (1 - 0.90) = 0.995$.