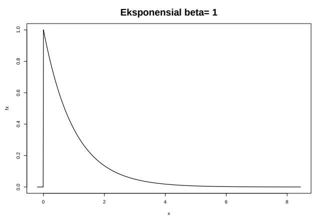
Kapittel 6: Kontinuerlige sannsynlighetsfordelinger

TMA4240 Statistikk (F2 og E7)

6.6-6.10: foreleses mandag 20. sept, 2004.



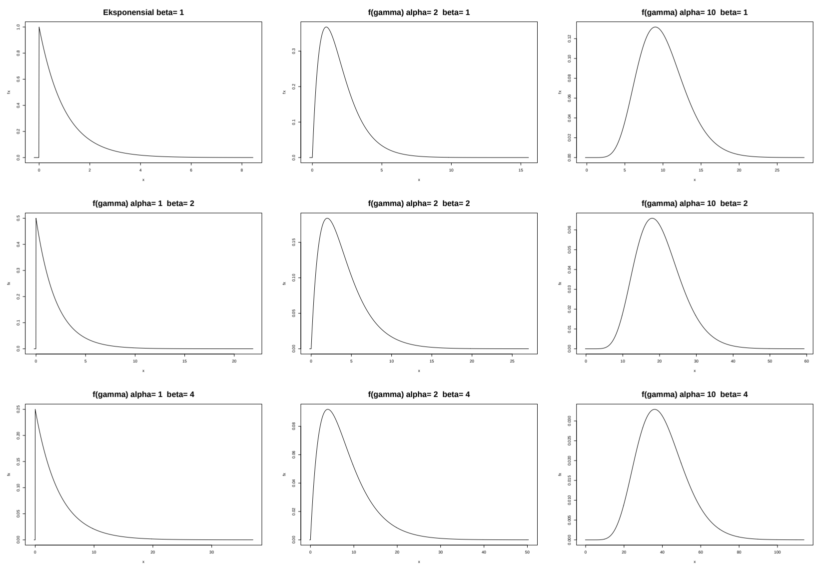
Ventetider i Poisson-prosess

- X = Antall hendelser i intervallet $[0, t]$ er Poisson-fordelt

$$p(x; \lambda t) \quad = \quad \frac{(\lambda t)^x}{x} e^{-\lambda t}, \quad x = 0, 1, \ldots$$

- Antall hendelser som inntreffer i to disjunkte intervall er uavhengige.
- Hendelsene i et intervall er uavhengige og uniformt fordelt over intervallet.
- Hvilken fordeling har ventetidene mellom to hendelser?

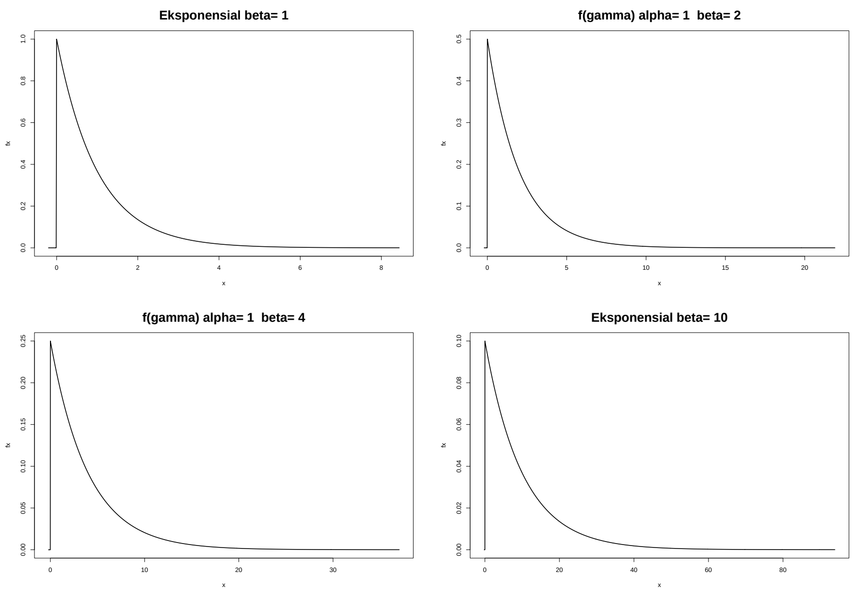
Gammafordelingen



$\mathrm{E}[X]$ for gammafordeling

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[X] &= \int x f(x) dx \\
&= \int_0^\infty x \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} dx \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{(\alpha+1)-1} e^{-\frac{x}{\beta}} dx \\
&= \frac{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \underbrace{\int_0^\infty \frac{1}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)} x^{(\alpha+1)-1} e^{-\frac{x}{\beta}} dx}_{=1} \\
&= \beta \frac{\alpha \Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = \alpha\beta.
\end{aligned}$$

Eksponential fordelingen



Tid til $n$te hendelse

- Lyspærer: Jeg kjøper en pakke med 10 lyspærer til stekeovnen min. Hvor lang tid holder de?
- Upersonlig epost (spam og reklame): Hvor lang til går det til jeg får 100 upersonlige eposter?
- Trafikk-kontroll: Foto-boks står montert i Vålerenga tunnelen. Den kan ta 36 bilder (?). Hvor langt tid tar det før veivesenet bør skifte film?
- Promillekontroll: Hvor lenge må politiet stå på post før de har fått 5 personer som har blåst rødt?

Vi kan ofte anta at disse er Poisson prosesser.

6.8 Kjikvadrat fordelingen

(mer fullstendig sammen med Kapittel 8.)

DEF En kontinuerlig S.V. X er kji-kvadrat fordelt med parametere ν (kalt frihetgrader), hvis sannsynlighetstettheten er gitt ved

$$f(x;\nu) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)} x^{\nu/2-1} e^{-x/2}, & x > 0 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

hvor ν er et positivt heltall.

Kji-kvadrat vs. gamma: Kji-kvadrat er gamma med $\alpha = \nu/2$ og $\beta = 2$.

Kjikvadrat fordelingen (forts.)

Forventing og varians i kji-kvadrat fordelingen er

$$\mu = E(X) = \nu \qquad \sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = 2 \cdot \nu$$