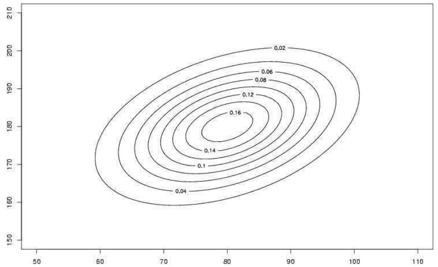
Kapittel 4: Matematisk forventning

TMA4240 Statistikk (F2 og E7)

Multivariate tilfeller foreleses mandag 6.september, 2004



Forventing til funksjon av flere stokastiske variable

DEF 4.2: La X og Y være stokastisk variable med simultan sannsynlighetsfordeling $f(x,y)$. Forventningsverdien til den stokastiske variabelen $g(X,Y)$ er

$$\mu_{g(X,Y)} = E[g(X,Y)] = \sum_x \sum_y g(x,y)f(x,y)$$

hvis X og Y er diskrete, og

$$\mu_{g(X,Y)} = E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f(x,y)dxdy$$

hvis X og Y er kontinuerlige.

Prosjektstyring (forts.)

- X = tid for datainnsamling, Y = tid for dataanalyse.

		x = 1	x = 2	x = 3	$f_Y(y)$
y	**1**	0.03	0.05	0.02	0.10
	2	0.03	0.14	0.03	0.20
	3	0.03	0.17	0.10	0.30
	4	0.01	0.24	0.15	0.40
	$f_X(x)$	0.10	0.60	0.30	1.00

- Er interessert i forholdet $g(X,Y) = \frac{Y}{X}$ mellom varigheten av datainnsamling og dataanalyse.

$$\begin{aligned} E\left[\frac{Y}{X}\right] &= \sum_x \sum_y \frac{y}{x} f(x,y) \\ &= 1\cdot 0.03 + (1/2)\cdot 0.05 + (1/3)\cdot 0.02 + 2\cdot 0.03 + 1\cdot 0.14 + (2/3)\cdot 0.03 \\ &+ \ 3\cdot 0.03 + (3/2)\cdot 0.17 + 1\cdot 0.10 + 4\cdot 0.01 + 2\cdot 0.24 + (4/3)\cdot 0.15 \\ &= 1.32 \end{aligned}$$

$$NB: E\left[\frac{Y}{X}\right] \neq \frac{E(X)}{E(Y)}.$$

E(funksjoner av flere stokastiske variabler)

TEO 4.7: Forventningsverdien til summen eller differansen av to eller flere funksjoner av de stokastiske variablene X og Y, er summen eller differansen til forventningsverdiene til funksjonene. Det vil si,

$$E[g(X,Y) \pm h(X,Y)] = E[g(X,Y)] \pm E[h(X,Y)].$$

COR 1: Setter vi $g(X,Y) = g(X)$ og $h(X,Y) = h(Y)$

$$E[g(X) \pm h(Y)] = E[g(X)] \pm E[h(Y)].$$

COR 2: Setter vi $g(X,Y) = X$ og $h(X,Y) = Y$

$$E[X \pm Y] = E[X] \pm E[Y].$$

Generalisering

$$
\begin{aligned}
Y &= \sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b \\
E(Y) &= \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i) + b
\end{aligned}
$$

- Formelsamlingen s 34.

Forventing til produktet av uavhengige stokastiske variable

TEO 4.8: La X og Y være to *uavhengige* stokastiske variable. Da er

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y).$$

4.2 Varians og kovarians

DEF 4.4: La X og Y være to stokastisk variable med simultan sannsynlighetsfordeling $f(x,y)$, og forventninger hhv. $\mu_X = E(X)$ og $\mu_Y = E(Y)$. *Kovariansen* til X og Y er

$$
\begin{aligned}
\sigma_{XY} &= \mathrm{Cov}(X,Y) = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] \\
&= \sum_x \sum_y (x-\mu_X)(y-\mu_Y) f(x,y)
\end{aligned}
$$

hvis X og Y er diskrete, og

$$
\begin{aligned}
\sigma_{XY} &= \mathrm{Cov}(X,Y) = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_X)(y-\mu_Y) f(x,y)\,dx\,dy
\end{aligned}
$$

hvis X og Y er kontinuerlige.

Kovarians og korrelasjon

TEO 4.4: Kovariansen til to stokastiske variable X og Y med forventninger hhv. $\mu_X = E(X)$ og $\mu_Y = E(Y)$, er gitt ved

$$
\begin{aligned}
\sigma_{XY} &= \mathrm{Cov}(X,Y) \\
&= E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) \\
&= E(X \cdot Y) - \mu_X \mu_Y
\end{aligned}
$$

DEF 4.5: La X og Y være to stokastisk variable med kovarians σ_{XY} og varianser hhv. σ_X^2 og σ_Y^2. Korrelasjonskoeffisienten til X og Y er

$$\rho_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Tolkning av Cov og ρ_{XY}

- Kovarians $\text{Cov}(X,Y) = E(X \cdot Y) - \mu_X\mu_Y$.
  - Når X og Y er uavhengige er $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y) = \mu_X\mu_Y$.
  - Dermed når X og Y er uavhengige er $\text{Cov}(X,Y) = \mu_X\mu_Y - \mu_X\mu_Y = 0$.
  - Men, hvis $\text{Cov}(X,Y) = 0$ betyr det nødvendigvis IKKE at X og Y er uavhengige.
- Korrelasjonskoeffisienten:
  - Hvis $Y = aX + b$ og $a > 0 \rightarrow \rho_{XY} = 1$
  - Hvis $Y = aX + b$ og $a < 0 \rightarrow \rho_{XY} = -1$
  - Hvis X og Y er uavhengige $\rightarrow \rho_{XY} = 0$
  - $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$.

Varians til lineærkombinasjon av to stokastiske variable

TEO 4.10: La X og Y være to stokastisk variable med simultan sannsynlighetsfordeling $f(x,y)$, da er

$$\begin{aligned}\sigma^2_{aX+bY} &= \text{Var}(aX+bY) = a^2\text{Var}(X) + b^2\text{Var}(Y) + 2ab\text{Cov}(X,Y) \\ &= a^2\sigma^2_X + b^2\sigma^2_Y + 2ab \cdot \sigma_{XY}\end{aligned}$$

COR 1: Hvis X og Y er uavhengige stokastiske variable, så er $Cov(X,Y) = 0$ og

$$\text{Var}(aX+bY) = a^2\text{Var}(X) + b^2\text{Var}(Y) = a^2\sigma^2_X + b^2\sigma^2_Y$$

COR 2: Hvis X og Y er uavhengige stokastiske variable, så er $Cov(X,Y) = 0$ og

$$\text{Var}(aX-bY) = a^2\text{Var}(X) + b^2\text{Var}(Y) = a^2\sigma^2_X + b^2\sigma^2_Y$$

COR 3: Hvis $X_1, X_2, \ldots, X_n$ er uavhengige stokastiske variable, så er

$$\begin{aligned}\text{Var}(a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n) &= a_1^2\text{Var}(X_1) + a_2^2\text{Var}(X_2) + \cdots + a_n^2\text{Var}(X_n) \\ &= a_1^2\sigma^2_{X_1} + a_2^2\sigma^2_{X_2} + \cdots + a_n^2\sigma^2_{X_n}\end{aligned}$$

Generalisering

$$\begin{aligned}Y &= \sum_{i=1}^{n} a_iX_i + b \\ E(Y) &= \sum_{i=1}^{n} a_iE(X_i) + b \\ \text{Var}(Y) &= \sum_{i=1}^{n} a_i^2Var(X_i) \\ &+ 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} a_ia_j\text{Cov}(X_i,X_j)\end{aligned}$$

- Formelsamlingen s 34.

Prosjektstyring

- Total varighet av aktiviteter er $X+Y$, hva er $\text{Var}(X+Y)$?

$$\begin{aligned}\mu_X = E(X) &= 1 \cdot 0.10 + 2 \cdot 0.60 + 3 \cdot 0.30 = 2.2 \\ \mu_Y = E(Y) &= 1 \cdot 0.10 + 2 \cdot 0.20 + 3 \cdot 0.30 + 4 \cdot 0.40 = 3.0 \\ \sigma^2_X = Var(X) &= E(X^2) - \mu_X^2 = 1^2 \cdot 0.10 + 2^2 \cdot 0.60 + 3^2 \cdot 0.30 - 2.2^2 \\ &= 5.2 - 4.84 = 0.36 \\ \sigma^2_Y = Var(Y) &= E(Y^2) - \mu_Y^2 \\ &= 1^2 \cdot 0.10 + 2^2 \cdot 0.20 + 3^2 \cdot 0.30 + 4^2 \cdot 0.40 - 3.0^2 \\ &= 10.00 - 9.00 = 1.00 \\ \sigma_{XY} = Cov(X,Y) &= E(XY) - \mu_X\mu_Y = 1 \cdot 1 \cdot 0.03 + 2 \cdot 1 \cdot 0.05 + \ldots + 3 \cdot 4 \cdot 0.15 \\ &\quad -2.2 \cdot 3.0 = 6.76 - 6.6 = 0.16 \\ E(X+Y) &= E(X) + E(Y) = 2.2 + 3.0 = 5.2 \\ Var(aX+bY) &= a^2Var(X) + b^2Var(Y) + 2ab\,Cov(X,Y) \\ Var(X+Y) &= Var(X) + Var(Y) + 2\,Cov(X,Y) \\ &= 0.36 + 1.00 + 2 \cdot 0.16 = 1.68\end{aligned}$$

Aksjekurs

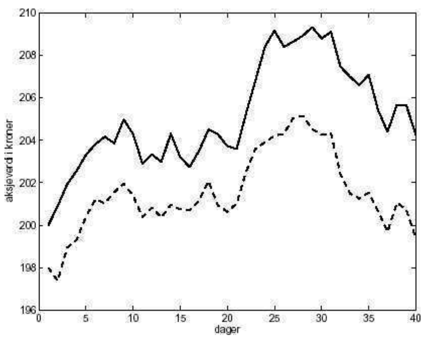
- Modifi sert versjon av eksamen Juni 2004, oppgave 2b+c
- Selskapet Agderfrukt er notert på børsen. Vi antar at endringen X i verdien på en Agderfrukt-aksje i løpet av en dag har forventningsverdi $\mu_X = 0.15$ kroner og standardavvik $\sigma_X = 0.60$ kroner. Har du en aksje i Agderfrukt vil $X > 0$ bety fortjeneste, mens $X < 0$ er tap.
- Selskapet Trønderfrukt er også notert på børsen. Vi kaller endringen på en Trønderfrukt-aksje i løpet av en dag for Y, der Y har forventningsverdi $\mu_Y = 0.15$ kroner og standardavvik $\sigma_Y = 0.80$ kroner.
- Vi ser på aksjekursendringen på den samme dagen for Agderfrukt og Trønderfrukt og antar i dette punktet at aksjekursendringene X og Y er uavhengige.
- Idag er verdien til en Agderfrukt-aksje den samme som verdien til en Trønderfrukt-aksje. Vi ønsker å undersøke tre mulige strategier for aksjekjøp, der vi kjøper aksjer idag og selger imorgen.

  i) Kjøp to aksjer i Agderfrukt.

  ii) Kjøp en aksje i Agderfrukt og en aksje i Trønderfrukt.

  iii) Kjøp to aksjer i Trønderfrukt.
- Dersom du vil ha minst mulig risiko for investeringen din, hvilken av de tre investeringsstrategiene over vil du velge? Begrunn svaret.

Aksjekurs, forts.



- Figuren viser utviklingen av aksjekursen til Agderfrukt (stiplet) sammen med aksjekursen til Trønderfrukt (heltrukket).

Aksjekurs, forts.

- Kursendringen dag i for Agderfrukt kaller vi X_i, og vi antar at X_i har forventning $\mu_X = 0.15$ kroner og standardavvik $\sigma_X = 0.60$ kroner.
- Kursendringen dag i for Trønderfrukt kaller vi Y_i, og vi antar at Y_i har forventning $\mu_Y = 0.15$ kroner og standardavvik $\sigma_Y = 0.80$ kroner.
- Kursendringer for ulike dager antas å være uavhengige.
- Vi sammenlikner de to selskapene ved å måle differansen mellom de daglige kursendringene, $D_i = X_i - Y_i$, og ta gjennomsnitt. Vi ser på 10 dager og får $\overline{D} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} D_i = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(X_i - Y_i)$.
- Gir fi guren grunn til å tro at endringene i de to aksjekursene samme dag, X_i og Y_i, er uavhengige?
- Korrelasjonen mellom X_i og Y_i for disse to selskapene, $\rho(X_i, Y_i)$, er enten -0.5, 0.0 eller 0.5. Hvilken av disse verdiene virker mest rimelig fra fi guren? Begrunn kort.
- Hva blir forventningsverdi og varians for $\overline{D}$? Benytt verdien for korrelasjonen, $\rho(X_i, Y_i)$, som du valgte over.

Vinduskarmen

- Andersen skal bytte ut nedre del av en vinduskarm som er 2 meter lang. Han kutter to planker slik at de er 1 meter hver.
- Det viktigste er at den totale lengden på de to plankene er 2 meter (passer i vinduskarmen).
- Andersen ser for seg to måter å gjøre dette på:
  - a) Uavhengig: måle planke 1 og kutte, deretter måle planke 2 og kutte.
  - b) Avhengig: legge de to plankene oppå hverandre, måle og kutte begge samtidig (antar de to plankene da blir akkurat like lange).
- Hvilken av disse to måtene bør Andersen velge?