

Kapittel 2: Sannsynlighet [2.6-2.8]

TMA4240 Statistikk (F2 og E7)

2.6, 2.7, 2.8: Betinget sannsynlighet [23.august 2004]



Ole.Petter.Loddoen@math.ntnu.no – p.1/18

Oppsummering fra 2.1-2.5

FENOMEN

↓ Eksperiment → Utfall

↓ Eksperiment → Utfall

↓ Eksperiment → Utfall

⋮

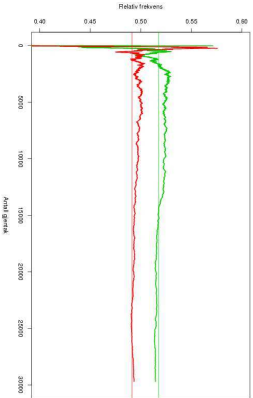
↓ Eksperiment → Utfall

Utfallssrom

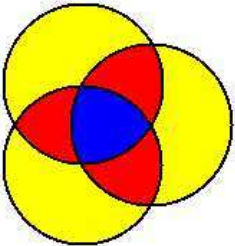
⊆

Hendelse

	ordnet	ikke-ordnet
med tilbakelegg.	$n!$	ikke pensum
uten tilbakelegg.	$\frac{n!}{(n-r)!}$	$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$



Sannsynlighet: egenskaper, gunstige vs. mulige, relativ frekvens



Sannsynlighet for mer enn en hendelse

2.6 Betinget sannsynlighet

DEF 2.9: Den betingede sannsynligheten for B, gitt A, skrives $P(B|A)$, og er definert som

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{hvis } P(A) > 0$$

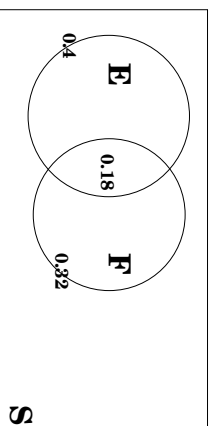
TEO 2.13: Hvis både hendelsene A og B kan inntreffe i et eksperiment, så er

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

Biltilsynet: utslipp fra bil

Biltilsynet har satt tall på følgende hendelser:

- E: overstige hydrokarbongrensen, $P(E)=0.32$
- F: overstige karbonoksydgrensen, $P(F)=0.4$
- $E \cap F$: overstige både hydrokarbon- og karbonoksydgrensen, $P(E \cap F)=0.18$



● Velg ut en tilfeldig bil i Norge, og registrer utslipp

- a) Hva er sannsynligheten for at bilen du undersøker overskrider karbonoksydgrensen, gitt at du allerede vet at den overskrider hydrokarbongrensen?
- b) Hva er sannsynligheten for at bilen du undersøker overskrider hydrokarbongrensen, gitt at du allerede vet at den overskrider karbonoksydgrensen?

Uavhengige hendelser

DEF 2.10: To hendelser A og B er **uavhengige** hvis og bare hvis

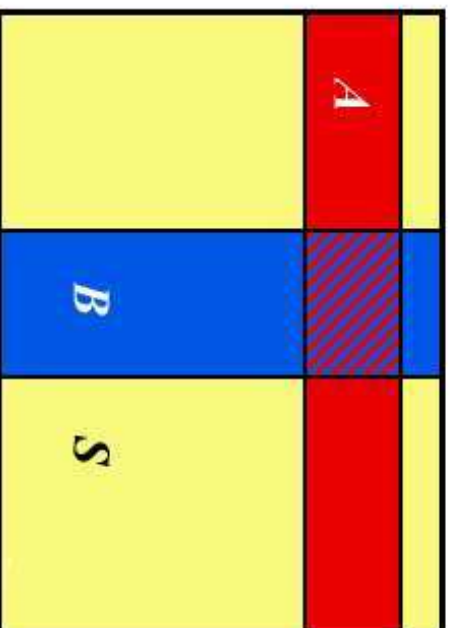
$$P(B|A) = P(B) \quad \text{eller} \quad P(A|B) = P(A)$$

Ellers, så er A og B **avhengige** hendelser.

TEO 2.14: To hendelser A og B er uavhengige hvis og bare hvis

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Venn diagram for uavhengige hendelser



Multihendelser

TEO 2.15: Hvis hendelsene $A_1, A_2, \dots, A_k$ kan inntreffe i et eksperiment, så er

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \dots P(A_k|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{k-1})$$

Hvis hendelsene $A_1, A_2, \dots, A_k$ er uavhengige, så er

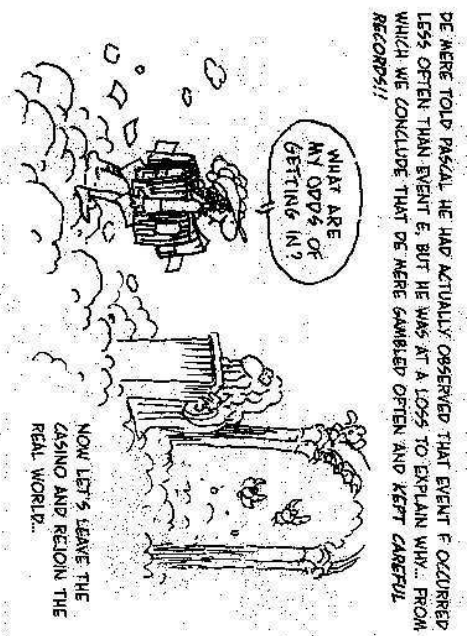
$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) = P(A_1) \cdot P(A_2)P(A_3) \dots P(A_k)$$

Tilbake til de Mere

- de Mere mente (fra empiriske data) at **1**) var større enn **2**):
 1. **minst en sekser på fire kast med en terning,** eller
 2. **minst en dobbel-sekser på 24 kast med to terninger?**
- Ved bruk at komplementærsetningen og setning for sannsynlighet for uavhengige hendelser kan vi regne ut sannsynligheten for **1**) og **2**).

deMere i mål

- $P(\text{minst en sekser på fire kast med en terning}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0.5177$
- $P(\text{minst en dobbelt-sekser på 24 kast}) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0.4914.$



Figur fra – og les mer i Cartoon Guide to Statistics – p.9/18

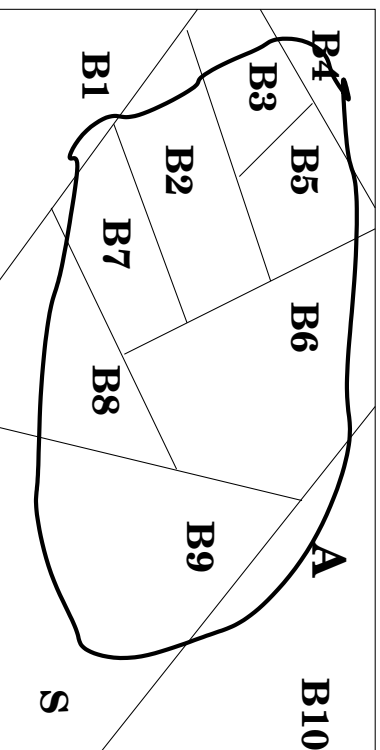
Idrettsutøvere

- Idrettsutøvere kan deles inn i tre kategorier:
 - De som doper seg nå (2%)
 - De som har dopet seg tidligere (14 %)
 - De som aldri har dopet seg (84 %)
 - La sannsynligheten for positiv dopingtest for de tre gruppene være hhv. 80 %, 6 % og 3 %.
- a)** Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig valgt idrettsutøver gir positiv test?
- b)** Hva er sannsynligheten for at en idrettsutøver som avlegger positiv dopingtest, virkelig er dopet?

Total sannsynlighet

TEO 2.16: Total sannsynlighet Hvis hendelsene $B_1, B_2, \dots, B_k$ gir en partisjon (oppdeling) av utfallsrommet S , slik at $P(B_i) \neq 0$ for $i = 1, \dots, k$, da har vi for hver hendelse A i S

$$P(A) = \sum_{i=1}^k P(B_i \cap A) = \sum_{i=1}^k P(B_i)P(A|B_i)$$



Bayes regel

TEO 2.17: Bayes regel Hvis hendelsene

$B_1, B_2, \dots, B_k$ gir en partisjon (oppdeling) av utfallsrommet S , slik at $P(B_i) \neq 0$ for

$i = 1, \dots, k$, da har vi for hver hendelse A i S hvor $P(A) \neq 0$ at

$$\begin{aligned} P(B_r|A) &= \frac{P(B_r \cap A)}{\sum_{i=1}^k P(B_i \cap A)} \\ &= \frac{P(B_r)P(A|B_r)}{\sum_{i=1}^k P(B_i)P(A|B_i)} \end{aligned}$$

for $r = 1, 2, \dots, k$.

Sykdom og test

- Definert hendelser:
 - S = syk person
 - T = positiv test
- Sensitivitet: Sannsynligheten for å oppdage at en person er syk. Mer presist: Sannsynligheten for at testen slår ut positivt, gitt at personen er syk. $P(T|S)$
- HIV-test: 98.0%
 - Mammografi : 98.0%
- Spesifisitet: Sannsynligheten for å oppdage at en person er frisk. Mer presist: Sannsynligheten for at testen slår ut negativt, gitt at personen er frisk. $P(T'|S')$
- HIV-test: 99.5%
 - Mammografi : 95.0%
- Interessante størrelser:
 - Sannsynligheten for at en person med positiv test virkelig er syk.
 - Sannsynligheten for at en person med negativ test virkelig er frisk.

HIV-test

- Hva er sannsynligheten for at en person med positiv HIV-test virkelig er HIV-smittet?
- Anta
 - $P(S) = 0,0005$ (Dagbladet febr 2003, 1900 smittet av HIV i Norge (av 4 000), dvs 0.5 promille.)
 - Sensitivitet $P(T|S) = 0.98$
 - Spesifisitet $P(T'|S') = 0.995$

	syk	frisk	totalt
positiv test			
negativ test			
totalt			

Avhengighet av forekomst

- “Hva er sannsynligheten for at en person med positiv test virkelig er syk” er avhengig av $P(S)$.
- Med sensitivitet $P(T|S) = 0.98$ og spesifisitet $P(T'|S') = 0.995$.

$P(S)$	$P(S T)$
$\frac{1}{10000}$	0.02
$\frac{1}{5000}$	0.04
$\frac{1}{1000}$	0.16
$\frac{1}{500}$	0.50
$\frac{1}{100}$	0.66

- Dette gir et problem ved masseundersøkelser. De fleste av personene med positiv prøve kan faktisk være friske.

TV-debatt

- Eksamensoppgave fra HiSør-Trøndelag 1998
- Et politisk spørsmål blir tatt opp i en TV-debatt. Et stykke ut i debatten stiller programlederen det samme spørsmålet til seerne. Vi ser heretter bare på de seerne som har en oppfatning om spørsmålet.
- De som mener *ja* oppfordres til å ringe et bestemt telefonnummer og de som mener *nei* et annet nummer.
- Vi antar i denne oppgaven at 70% av seerne mener *ja* og 30% mener *nei*.
- Vi antar videre at sannsynligheten for at en tilfeldig *ja*-seer ringer inn, er 0.05, og sannsynligheten for at en tilfeldig *nei*-seer ringer inn, er 0.10.
- La J være hendelsen at en seer mener *ja*, og R være hendelsen at han ringer.
- a) Formuler de fire opplysningene som sannsynligheter (betingede og ubetingede) for J og R . Bestem $P(R)$.
- b) Hvor stor andel av innringerne mener *ja*? Gir resultatet et riktig bilde av seernes oppfatning?

Tykkelse av veidekke

- Før en seksjon av en ny vei er godkjent for bruk inspiseres tykkelsen av veidekket ved hjelp av ultralyd.
- For et 8' (20 cm) dekke, gjøres dette hver $\frac{1}{10}$ mile (160 meter). Hver 160 meter seksjon vil aksepteres hvis den målte tykkelsen er minst 7.5' (19cm).
- Anta at 90% av seksjonene følger forskriftene (de er faktisk tykkere enn 19cm)
- Men, en ultralydmåling er dessverre bare 80% sikker,
 - dvs. 80% sjanse for at målingen viser $\geq 19\text{cm}$ gitt at tykkelsen i virkeligheten er $\geq 19\text{cm}$,
 - og at det er 80% sjanse for at målingen viser $< 19\text{cm}$, gitt at tykkelsen i virkeligheten er $< 19\text{cm}$.
- a) Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig valgt seksjon av veien er laget etter forskriftene (dvs. $\geq 19\text{cm}$ tykk) og blir godkjent for bruk (ultralydmåling $\geq 19\text{cm}$).
- b) Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig valgt seksjon av veien ikke er laget etter forskriftene (dvs. $< 19\text{cm}$ tykk), men blir godkjent for bruk (ultralydmåling $\geq 19\text{cm}$).

Modifisert versjon tatt fra Ang & Tang: Probability Concepts in Engineering Planning and Design – p.17/18

Tykkelse av veidekke (forts.)

- D=”tykkelsen av dekket i valgt seksjon er $\geq 19\text{cm}$ ”
- T=”ultralydmålingen er $\geq 19\text{cm}$ ”
- Anta at 90% av seksjonene følger forskriftene (de er faktisk tykkere enn 19cm): dvs $P(D)=0.9$.
- Men, en ultralydmåling er dessverre bare 80% sikker: $P(T|D)=0.8$ og $P(T'|D')=0.8$
- c) Hva er sannsynligheten for at en seksjonen som er laget etter forskriftene (dvs. $> 19\text{cm}$ tykk) blir godkjent for bruk (ultralydmåling $> 19\text{cm}$)?
- d) Hva er sannsynligheten for at en seksjonen som er godkjent for bruk (ultralydmåling $> 19\text{cm}$), virkelig er laget etter forskriftene?

Modifisert versjon tatt fra Ang & Tang: Probability Concepts in Engineering Planning and Design – p.18/18