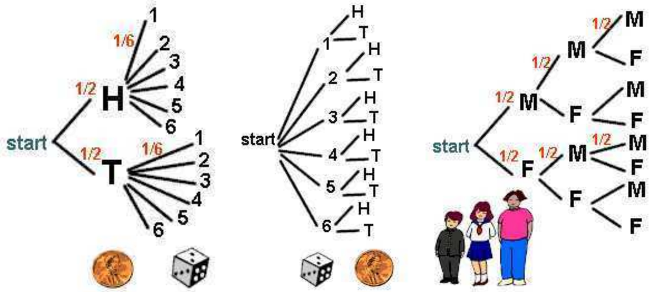
Kapittel 2: Sannsynlighet [2.3-2.5]

TMA4240 Statistikk (F2 og E7)

2.3, 2.4, 2.5: Kombinatorikk og sannsynlighet [18.august 2004]

Ole.Petter.Lodoen@math.ntnu.no

Produktregel for valgprosess



TEO 2.1 Produktregel: Hvis en operasjon kan utføres på n_1 måter, og for hver av disse en annen operasjon kan utføres på n_2 måter, så kan de to operasjonene utføres på $n_1 n_2$ måter.

TEO 2.2 Den generaliserte produktregel: En valgprosess har k trinn. I det første trinnet er det n_1 valgmuligheter, i det andre trinnet er det n_2 muligheter, ..., i det siste trinnet er et n_k muligheter. Da er det tilsammen $n_1 n_2 \ldots n_k$ valgmuligheter.

Kombinatorikk

- På hvor mange måter kan man trekke r elementer fra n når trekningen skjer med/uten tilbakelegging når ordningen betyr/ikke betyr noe?

	ordnet	ikke-ordnet
med tilbakelegg.	?	ikke pensum
uten tilbakelegg.	?	?

Permutasjoner

DEF 2.7 Permutasjon: En permutasjon er en ordning av alle, eller en delmengde av alle elementer.

TEO 2.3: n elementer kan ordnes i rekkefølge på $n!$ $= n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$ måter.

TEO 2.5: n elementer kan ordnes i rekkefølge i en sirkel på $(n-1)! = (n-1) \cdots 2 \cdot 1$ måter.

Ordnede utvalg

MED tilbakelegging: Fra en mengde med n elementer kan vi lage $n \cdot n \cdots n = n^r$ ordnede utvalg på r elementer når utvelgingen skjer med tilbakelegging.

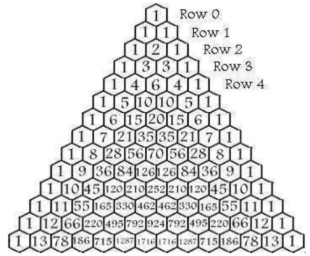
UTEN tilbakelegging, TEO 2.4: Fra en mengde med n elementer kan vi lage $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-r+1) \equiv_n P_r$ ordnede utvalg på r elementer nå utvelgingen skjer uten tilbakelegging.

Ikke-ordnede utvalg

TEO 2.8 Uordnet utvalg uten tilbakelegging: Fra en mengde med n elementer kan vi lage $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} =_n C_r$ uordnede utvalg på r elementer når utvelgingen skjer uten tilbakelegging.

Binomisk koeffisient og Pascals trekant

- Binomisk koeffisient: $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$.



- $\binom{n}{r}$ finnes i rad n på plass r.

Ikke-ordnede utvalg i r celler

- Generalisering av ikke-ordnede utvalg i 2 celler (de r vi har valgt og de $(n-r)$ vi ikke har valgt).

TEO 2.7: Vi kan dele en mengde med n elementer inn i r celler med n_1 elementer i første celle, n_2 elemeter i andre celle, ..., og n_r elementer i $r$te celle, på $\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_r!}$ måter, der $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_r$.

TEO 2.6: Antall ordninger av n objekter, der n_1 er av type 1, n_2 er av type 2, ... og n_k er av type k, er $\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$. (Sier det samme som TEO 2.7).

Multinomisk koeffisient: $\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r}$

Oppsummering kombinatorikk

- På hvor mange måter kan man trekke r elementer fra n når trekningen skjer med/uten tilbakelegging når ordningen betyr/ikke betyr noe?

	ordnet	ikke-ordnet
med tilbakelegg.	n^r	ikke pensum
uten tilbakelegg.	$\frac{n!}{(n-r)!} = {}_nP_r$	$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = {}_nC_r$

Kombinatorikk

$n! = 1 \cdot 2 \cdots n$ er antall måter å permutere (ordne) n elementer.

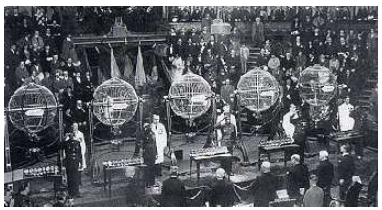
${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} = n \cdot (n-1) \cdots (n-r+1)$ er antall ordnede utvalg når r elementer velges blant n uten tilbakelegging.

$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{{}_nP_r}{r!} = {}_nC_r$ er antall ikke-ordnede utvalg når r elementer velges blant n uten tilbakelegging.

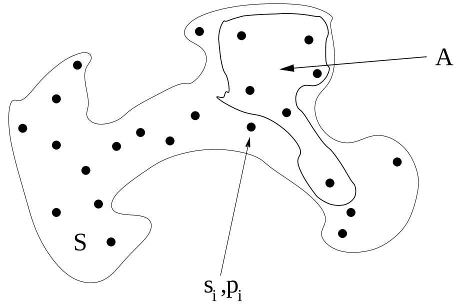
32

Eksamen november 2001, 1a

- I denne oppgaven skal vi analysere to forskjellige aspekter ved lottotipping.
- I lotto spiller en deltager en enkeltrekke ved å velge 7 av 34 tall. Det er også tillatt å spille system. Når en deltager spiller system velger deltageren ut m av 34 tall, hvor m betegner antall tall i systemet. Når en deltager spiller et system av størrelse m, vil antall enkeltrekker som spilles være lik antall mulige kombinasjoner av 7 tall blant de m tallene i systemet.
  1. Hvor mange enkeltrekker spilles i et system som inneholder 8 tall?
  2. Hvor mange enkeltrekker spilles i et system som inneholder m tall?
  3. Når en leverer inn en lottokupong, må en betale kr 3,- per enkeltrekke som spilles. Hvor mye koster det å levere inn et system med 12 tall? (Dette er det største systemet som er tillatt av Norsk Tipping.)



2.4 Sannsynlighet for hendelse



DEF 2.8 (modifisert) Et sannsynlighetsmål, P, på et utfallsrom, S, er en reell funksjon definert på hendelser i S, slik at

- $0 \leq P(A) \leq 1,\ A \in S$
- $P(S) = 1$
- $P(\emptyset) = 0$

2.4 Sannsynlighet for hendelse

TEOREM 2.9 Hvis resultatet av et eksperiment er ett av N like sannsynlige utfall (uniform sannsynlighetsmodell), og hvis nøyaktig n av disse gir hendelsen A, så er sannsynligheten til A

$$P(A) = \frac{n}{N} = \frac{\text{antall gunstige utfall for A}}{\text{antall mulige utfall}}$$

2.4 Sannsynlighet for hendelse

- Kast to terninger

		Første terning					
		1	2	3	4	5	6
	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
	2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
Andre	3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
terning	4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
	5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
	6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

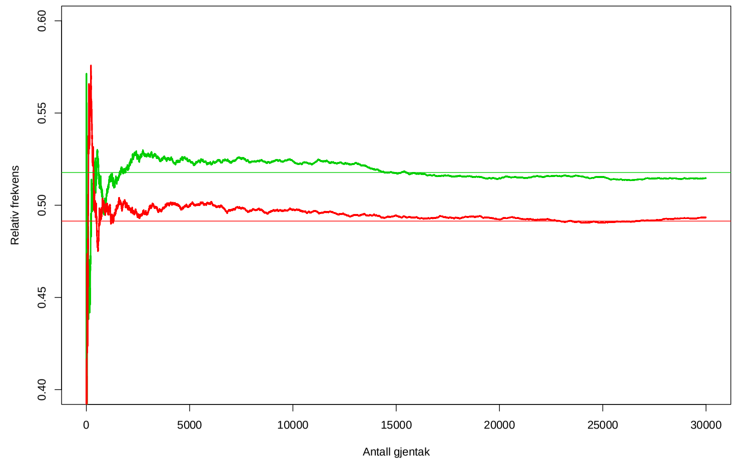
- Merk av i tabellen over og finn sannsynligheten for følgende hendelser:
  1. A: samme antall øyne for begge terninger
  2. B: sum antall øyne ≥ 10
  3. C: minst en sekser

Alternativt om sannsynlighet

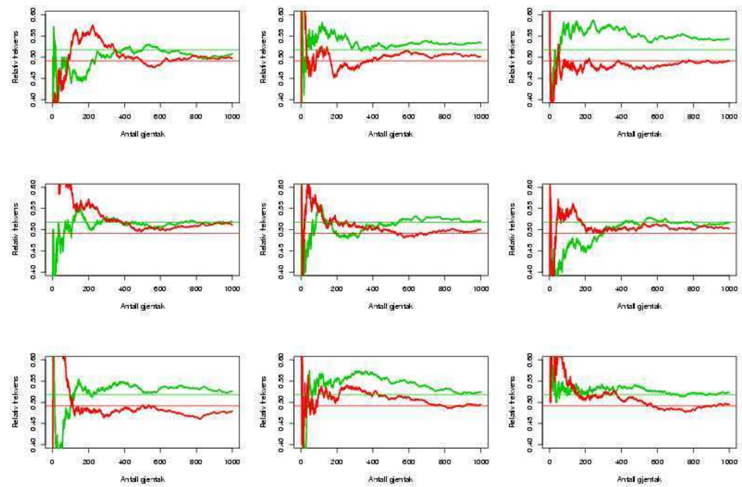
- Sannsynlighet kan være en subjektiv betraktning.
  - Sannsynligheten for at RBK vinner serien i 2004.
  - Sannsynligheten for at du står til eksamen i TMA4240.
- Relativ frekvens konvergerer mot sannsynlighet
  - Chevalier de Mere's problem: er det mer sannsynlig å få
    1. minst en sekser i fire kast med en terning, eller
    2. minst en dobbel-sekser i 24 kast med to terninger?
  - de Mere mente (fra empiriske data) at 1) var større enn 2).

deMere: relativ frekvens

- minst en sekser i fire kast med en terning
- minst en dobbel-sekser i 24 kast med to terninger



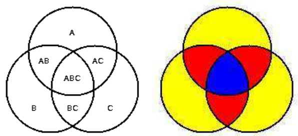
deMere: ulike startpunkt



2.5 Addisjonsregler

TEO 2.11: Hvis A, B og C er tre hendelser, så er

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$
$$-P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C)$$
$$+P(A \cap B \cap C)$$



3 Noen resultater og definisjoner

Addisjonssetningen

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots$$
$$+(-1)^{n+1} P(A_1 \cap \ldots \cap A_n).$$

Disjunkte hendelser

TEO 2.10: Hvis A og B er to hendelser, så er

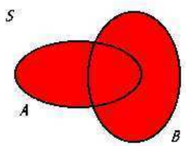
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

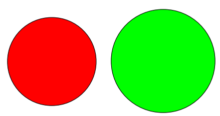
Korrolar 1: Hvis A og B er disjunkte er

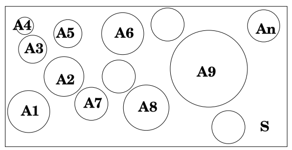
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Korrolar 2: Hvis $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ er disjunkte hendelser, så er

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) =$$
$$P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$







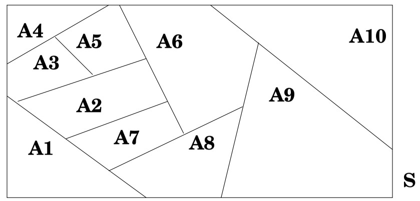
Partisjon av utfallsrommet

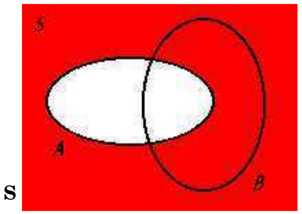
Korrolar 3: Hvis $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ er en partisjon av utfallsrommet S, da er

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) =$$
$$P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) = P(S) = 1$$

TEO 2.12: Hvis A og A' er komplementære hendelser, så er

$$P(A) + P(A') = 1$$





2.5 Addisjonsregler

- Fortsettelse: kast to terninger

		Første terning					
		1	2	3	4	5	6
	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
	2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
Andre	3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
terning	4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
	5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
	6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

- Følgende hendelser er definert:
  - A: samme antall øyne for begge terninger, $P(A) = \frac{1}{6}$
  - B: sum antall øyne ≥ 10, $P(B) = \frac{1}{6}$
  - C: minst en sekser, $P(C) = \frac{11}{36}$
- Finn sannsynligheten for
  - $A \cup B$: samme antall øyne og/eller sum ≥ 10
  - $A \cup B \cup C$: samme antall øyne og/eller sum ≥ 10 og/eller minst en sekser.