# LØSNINGSFORSLAG EKSAMEN TMA4245 2008-05-20

## Oppgave 1

**a)**

$$P(X < 50) = P(Z < \frac{50 - 50.5}{1}) = P(Z < -0.5) = 0.3085$$

$$P(X < 50.5|X > 50) = \frac{P(50 < X < 50.5)}{P(X > 50)} = \frac{P(-0.5 < Z < 0)}{P(Z > -0.5)} = \frac{0.1915}{0.6915} = 0.2769$$

**b)** La $Y = \sum_{i=1}^{25} X_i$. Da er $Y$ normalfordelt med forventning $25 \cdot 50.5$ og varians 25.

$$P(1250 < Y) = P(\frac{1250 - 25 \cdot 50.5}{\sqrt{25}} < Z) = P(-2.5 < Z) = 0.9938$$

La $X_1, X_2, X_3$ være vektene av de tre potetene. Da vil

$$\begin{aligned} P(\min(X_1, X_2, X_3) < 50) &= 1 - P(\min(X_1, X_2, X_3) > 50) \\ &= 1 - P(X_1 > 50 \cap X_2 > 50 \cap X_3 > 50) \\ &= 1 - P(X_1 > 50)P(X_2 > 50)P(X_3 > 50) \\ &= 1 - (1 - 0.3085)^3 = 0.6694 \end{aligned}$$

**c)** Kvadratsummen

$$SSE = \sum_{j=0}^{7} (y_j - a - b(u_j - \bar{u}))^2$$

skal minimeres med hensyn på a og b.

$$\begin{aligned} \frac{\partial SSE}{\partial a} &= \sum_{j=0}^{7} 2(y_j - a - b(u_j - \bar{u})) \cdot (-1) \\ &= -2 \sum_{j=0}^{7} (y_j - a) \end{aligned}$$

$\frac{\partial SSE}{\partial a} = 0$ gir

$$a = \frac{1}{7}\sum_{j=0}^{7} y_j = \bar{y}$$

og minste kvadratsumsestimator for $\alpha$ blir

$$A = \frac{1}{7}\sum_{j=1}^{7} Y_j = \bar{Y}$$

$$\frac{\partial SSE}{\partial b} = \sum_{j=1}^{7} 2(y_j - a - b(u_j - \bar{u}))(-1)(u_j - \bar{u})$$

$\frac{\partial SSE}{\partial b} = 0$ gir

$$b = \frac{\sum_{j=1}^{7}(u_j - \bar{u})y_j}{\sum_{j=1}^{7}(u_j - \bar{u})^2}$$

og minste kvadratsumsestimator for $\beta$ blir

$$B = \frac{\sum_{j=1}^{7}(u_j - \bar{u})Y_j}{\sum_{j=1}^{7}(u_j - \bar{u})^2}$$

**d)**

$$E(A) = E(\frac{1}{7}\sum_{j=1}^{7} Y_j) = \frac{1}{7}\sum_{j=1}^{7} E(Y_j) = \frac{1}{7}\sum_{j=1}^{7} \alpha + \beta(u_j - \bar{u}) + 0) = \alpha$$

$$\begin{aligned} E(B) &= E(\frac{\sum_{j=1}^{7}(u_j - \bar{u})Y_j}{\sum_{j=1}^{7}(u_j - \bar{u})^2}) = \frac{\sum_{j=1}^{7}(u_j - \bar{u})E(Y_j)}{\sum_{j=1}^{7}(u_j - \bar{u})^2} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^{7}(u_j - \bar{u})(\alpha + \beta(u_j - \bar{u}) + 0)}{\sum_{j=1}^{7}(u_j - \bar{u})^2} = \frac{\sum_{j=1}^{7}(u_j - \bar{u})^2\beta}{\sum_{j=1}^{7}(u_j - \bar{u})^2} = \beta \end{aligned}$$

$$Var(A) = Var(\bar{Y}) = \frac{\tau^2}{7}$$

$$\begin{aligned} Var(B) &= Var(\frac{\sum_{j=1}^{7}(u_j - \bar{u})Y_j}{\sum_{j=1}^{7}(u_j - \bar{u})^2}) = \frac{\sum_{j=1}^{7}(u_j - \bar{u})^2 Var(Y_j)}{(\sum_{j=1}^{7}(u_j - \bar{u})^2)^2} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^{7}(u_j - \bar{u})^2\tau^2}{(\sum_{j=1}^{7}(u_j - \bar{u})^2)^2} = \frac{\tau^2}{\sum_{j=1}^{7}(u_j - \bar{u})^2} \end{aligned}$$

**e)**

$$a = \bar{y} = 18.16$$

$$b = \frac{\sum_{j=1}^{7}(u_j - \bar{u})y_j}{\sum_{j=1}^{7}(u_j - \bar{u})^2} = \frac{0.59}{0.0028} = 210.7143$$

$$\hat{y}_0 = a + b(u_0 - \bar{u}) = 18.16 + 210.7143 \cdot (1.115 - 1.1) = 21.32$$

Variabelen $Y_0 - \hat{Y}_0$ er normalfordelt siden den kan skrives opp som en lineærkombinasjon av normalfordelte variable $\epsilon_j$, $j = 1, \ldots, n$.

$$\begin{aligned} E(Y_0 - \hat{Y}_0) &= E(\alpha + \beta(u_0 - \bar{u}) + \epsilon_0 - (A + B(u_0 - \bar{u}))) \\ &= \alpha + \beta(u_0 - \bar{u}) + 0 - (\alpha + \beta(u_0 - \bar{u})) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(Y_0 - \hat{Y}_0) &= Var(\alpha + \beta(u_0 - \bar{u}) + \epsilon_0 - (A + B(u_0 - \bar{u}))) \\ &= \tau^2 + Var(A) + (u_0 - \bar{u})^2 Var(B) \\ &= \tau^2 + \frac{\tau^2}{7} + \frac{\tau^2(u_0 - \bar{u})^2}{\sum_{j=1}^{7}(u_j - \bar{u})^2} \end{aligned}$$

$$P(-z_{\alpha/2} < \frac{Y_0 - \hat{Y}_0}{\sqrt{Var(Y_0 - \hat{Y}_0)}} < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

$$P(\hat{Y}_0 - z_{\alpha/2}\sqrt{Var(Y_0 - \hat{Y}_0)} < Y_0 < -\hat{Y}_0 + z_{\alpha/2}\sqrt{Var(Y_0 - \hat{Y}_0)}) = 1 - \alpha$$

Et $1 - \alpha$ prediksjonsintervall for $Y_0$ blir dermed

$$\hat{Y}_0 \pm z_{\alpha/2}\sqrt{Var(Y_0 - \hat{Y}_0)}$$

Realisert verdi blir

$$\begin{aligned} \hat{y}_0 \pm z_{\alpha/2}\sqrt{Var(Y_0 - \hat{Y}_0)} &= a + b(u_0 - \bar{u}) \pm z_{0.025}\sqrt{\tau^2 + \frac{\tau^2}{7} + \frac{\tau^2(u_0 - \bar{u})^2}{\sum_{j=1}^{7}(u_j - \bar{u})^2}} \\ &= 21.32 \pm 1.96 \cdot 0.7\sqrt{1 + \frac{1}{7} + \frac{(1.115 - 1.10)^2}{0.0028}} \\ &= 21.32 \pm 1.52 \end{aligned}$$

**Oppgave 2**

**a)** A: Petter vinner det første spillet og Katrine vinner de to neste

$$P(A) = (1-p)p^2 = 0.096$$

Antallet suksesser $X$ er binomisk fordelt siden suksess-sannsynligheten er den sammme for alle forsøkene og utfallene av forsøkene er gjensidig uavhengige.

$$P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

og $P(X=1) = 0.13$.

**b)**

$$p(z_1, z_2, .., z_7) = \prod_{i=1}^{7} p^{z_i}(1-p)^{1-z_i} = p^{\sum_{i=1}^{n} z_i}(1-p)^{\sum_{i=1}^{n} 1-z_i} = p^x(1-p)^{n-x} = L(p) = \exp(l(p))$$

$$\frac{\partial l}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p}\ln(p^x(1-p)^{n-x}) = \frac{\partial}{\partial p}\left(x\ln(p) + (n-x)\ln(1-p)\right) = \frac{x}{p} - \frac{n-x}{1-p}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial p} &= 0 \\ &\Updownarrow \\ \frac{x}{p} - \frac{n-x}{1-p} &= 0 \\ &\Updownarrow \\ p &= \frac{x}{n}, x \neq 0, n \end{aligned}$$

$x = 0$ gir $p = 0$ (verdien på p som maksimerer $L(p)$) og $x = n$ gir $p = 1$ så estimatoren blir

$$\hat{p} = \frac{X}{n}$$

og realisert verdi $\hat{p} = 3/7 = 0.43$.

**c)**

$$E(\hat{p}) = \frac{E(X)}{n} = \frac{np}{n} = p$$

$$Var(\hat{p}) = \frac{Var(X)}{n^2} = \frac{np(1-p)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n}$$

**d)** $H_0 : p = 0.5,\ H_1 : p < 0.5$
Testobservator $X$ er binomisk fordelt med $p = 0.5, n = 7$
Kritisk område for testen blir $C = \{0\}$, siden $P(X = 0; H_0) = 0.0078$ og
$P(X \leq 1; H_0) = 0.0547 > \alpha$ ‘’ Resultatet ble $x = 3 \notin C$ og vi beholder $H_0$

**e)**

$$P(X \in C; p = 0.1) = P(X = 0; p = 0.1) = 0.9^7 = 0.4783$$

Utregning for $n = 8$:
Kritisk område blir $C = \{0, 1\}$ siden $P(X = 0; H_0) = 0.004$,$P(X \leq 1; H_0) = 0.035$ $P(X \leq 2; H_0) = 0.145$.
Styrken blir da

$$P(X \in C; p = 0.1) = P(X \leq 1; p = 0.1) = 0.8131 > 0.8,$$

Utregningene over kan gjøres for økende n.

| n | $C$ | styrke |
|---|---|---|
| 1-4 | $\{\}$ | 0 |
| 5 | $\{0\}$ | 0.590 |
| 6 | $\{0\}$ | 0.531 |
| 7 | $\{0\}$ | 0.488 |
| 8 | $\{0, 1\}$ | 0.813 |
| 9 | $\{0, 1\}$ | 0.775 |
| 10 | $\{0, 1\}$ | 0.736 |
| 11 | $\{0, 1, 2\}$ | 0.910 |
| 12 | $\{0, 1, 2\}$ | 0.889 |
| 13 | $\{0, 1, 2, 3\}$ | 0.966 |

Så $n = 8$ er minste verdi på n som gir ønsket styrke. Legg ellers merke til at $n = 9, 10$ gir styrke mindre enn 0.8.