I dag

I dag Rekning av eksamensoppgåver

- Eksamen Mai 2014, oppgåve 2 (inkl normal fordeling, lin.reg. og deskriptiv statistikk)
- Eksamen August 2012, oppgåve 3 a og b (inkl SME)

Om eksamen

- (Truleg) 10 punkt.
- Alle punkt tel like mykje. VIKTIG å få til dei lette rett.
- Gult A5 ark. Lov å skrive på begge sider.
- Formalsamlinga. Her står det mykje, bli kjent med!
- Hjelpetimar, endringar i pensum m.m. sjå wikien på Før/Under/Etter Eksamen.

Never, never, never give up!

TMA4245 Kort versjonen

Kurset har tre delar:

- Deskriptiv statistikk (Kap 1 + litt i Kap 8)
- Sannsynsteori (Kap 1-7 + notat)
- Statistikk (Kap 8-11)

PS: Dette er ei oppsummering av dei viktigaste begrepa og metodane. Ikkje ein lovnad om kva som kjem og ikkje kjem på eksamen.

Sannsynsfordeling

Diskret

Paret $(x, f(x))$ blir kalla sannsynsfordelinga til den diskret stok. var. X dersom

- $0 \leq f(x)$
- $\sum_{\forall x} f(x) = 1$ (summen over alle mogelege x)
- $f(x) = P(X = x)$

Kontinuerleg

Funksjonen $f(x)$ definert for alle reelle tal $x \in \Re$ blir kalla sannsynsfordelinga til den kontinuerlege stok. var. X dersom

- $0 \leq f(x)$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
- $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$

Kummulativ sannsynsfordeling

Definisjon

Den *kummulative fordelinlgsfunksjonen* $F(x)$ *for ein stok. var.* X *er:*

$$F(x) = P(X \leq x)$$

- *Diskret:* $F(x) = \sum_{t \leq x} f(t)$
- *Kontinuerleg* $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

For diskret stokastiske variable er det viktig med $<$ eller $\leq$, for kontinuerlege stokastiske variable er det likegyldig.

Kap 4. Matematisk forventning

- Forventningsverdi $E(X)$
- Varians $Var(X)$ og standardavvik $Std(X) = \sqrt{Var(X)}$
- Vit at kovarians og korrelesjon måler lineær avhengighet
- Forventning og varians av lineærkombinasjonar

Definisjon 4.1

La X vere ein stok.var. med sannsynsfordeling $f(x)$.
Forventningsverdien til X er då

$$\mu = E(X) = \sum_{\forall x} xf(x)$$

dersom X er diskret, og

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

dersom X er kontinuerleg.

Tolkning:

- Gjennomsnitt av uendeleg mange data trukke frå $f(x)$
- Massesenteret til fordelinga.

Definisjon 4.3

La X vere ein stok. var. med forventning μ. Variansen til X er då:
For diskret X:

$$Var(X) = E((X-\mu)^2) = \sum_{\forall x}(x-\mu)^2 f(x)$$

For kontinuerleg X:

$$Var(X) = E((X-\mu)^2) = \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx$$

Tolkning Spredning, $Std(X) = \sqrt{Var(X)}$ same skala som X.
Eigenskap Må vere positiv (eller 0).

Forventning og varians av lineærkombinasjon

Teorem, VIKTIG

Dersom $a_0, a_1, \ldots, a_n$ er konstantar og $X_1, X_2, \ldots X_n$ stok. var., så er

$$E(a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i X_i) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i)$$

og

$$Var(a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i X_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var(X_i) + 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} a_i a_j Cov(X_i, X_j)$$

for ***uavhengige*** $X_1, \ldots, X_n$ er

$$Var(a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i X_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var(X_i)$$

Kap 5 Diskret sannsynsfordelingar

- Binomisk fordeling og Bernoulli prosess
- Hypergeometrisk
- Geometrisk
- Poisson fordeling og poissonprosess

Bernoulli prosess og binomisk fordeling

Bernoulli prosess

1. n uavhengige forsøk
2. Kvart forsøk resulterer i suksess, $I_i = 1$ eller ikkje-suksess $I_i = 0$.
3. Suksess-sannsynet $p = P(I_i = 1)$ er konstant.

Binomisk fordeling

Ser på antall suksess i ein Bernoulli prosess, $X = \sum_{i=1}^{n} I_i$. X er då binomisk fordelt;

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Kontinuerlege sannsynsfordelingar

- Normal fordeling $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
  - Kunne rekne i normal fordeling, dvs standardisere ($Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \Rightarrow Z \sim N(0,1)$) og slå opp i tabell.(Eksamen mai 2014, oppgåve 2)
  - Lineær kombinasjon av normal fordelte stok.var. er normal fordelt.
- Eksponensial fordeling
  - Tid til første hending i Possion prosess er eksponensial fordelt.
- t-fordeling
- Kji-kvadrat fordeling.

Kap 7. Funksjonar av stokastiske variable

- Ein funksjon av stok.var. er sjølv ein stok.var.
- Transformasjon av ein stok.var.
- Moment og momentgenererande funksjonar (for den spesielt interesserte/ambisiøse).
- Lineær kombinasjon av normalfordelte stok.var. er normalfordelt.
- Lineær kombinasjon av kji-kvadrat er kji-kvadrat.

Notat: Ordningsvariable

Skal kunne finne sannsynsfordelinga til

- minimum (minste av n stokastiske variable)
- maximum (største av n stokastiske variable)

(Eksamen mai 2014, oppgåve 2c)

Statistikk

- Kap.8: Utvalsfordelingar
- Kap.9: Estimering og konfidensintervall (KI)
- Kap.10: Hypotesetesting
- Kap.11: Enkel lineær regresjon

Utvalsfordelingar

- Tilfeldig utval
- Utvalsfordelingar.
- Utvalsfordelinga til gjennomsnittet $\bar{X}$
- Sentralgrenseteoremet (SGT)
- Utvalsfordeling for varians normalfordeling, χ^2_{n-1}
- Utvalfordeling for gjennomsnitt normalfordeling og ukjent varians, T_{n-1}

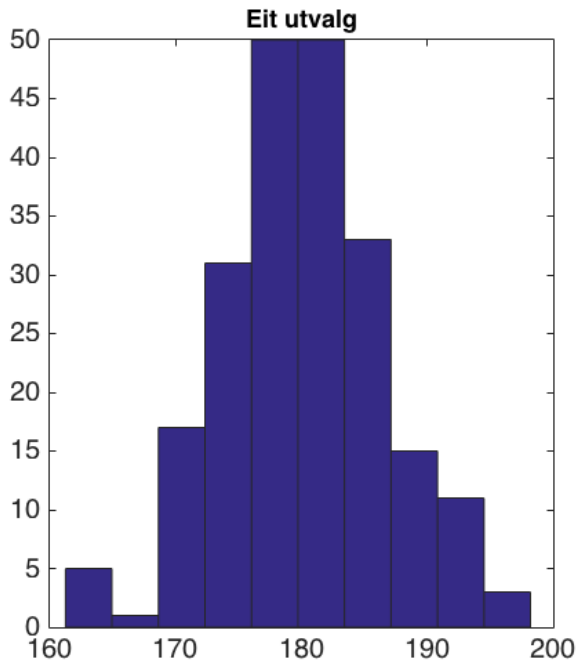
Utvalgsfordelinga til $\bar{X}$

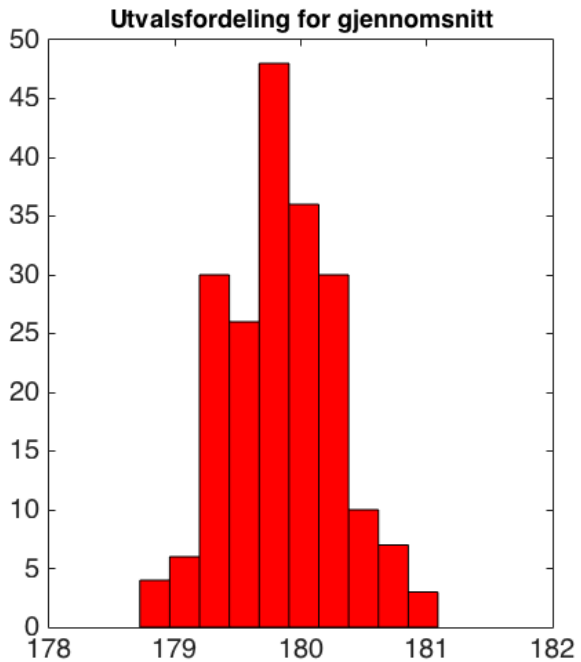
Algoritme

For $m = 1 : M$

- Trekk n=216 datapunkt frå $N(179.8, 6.5^2)$ $m = 1, \ldots, M$ gongar $\Rightarrow x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mn}$.
- Finn gjennomsnittet $\bar{x}_m = 1/n \sum_{i=1}^{n} x_{mi}$

Plott histogram for $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_M$

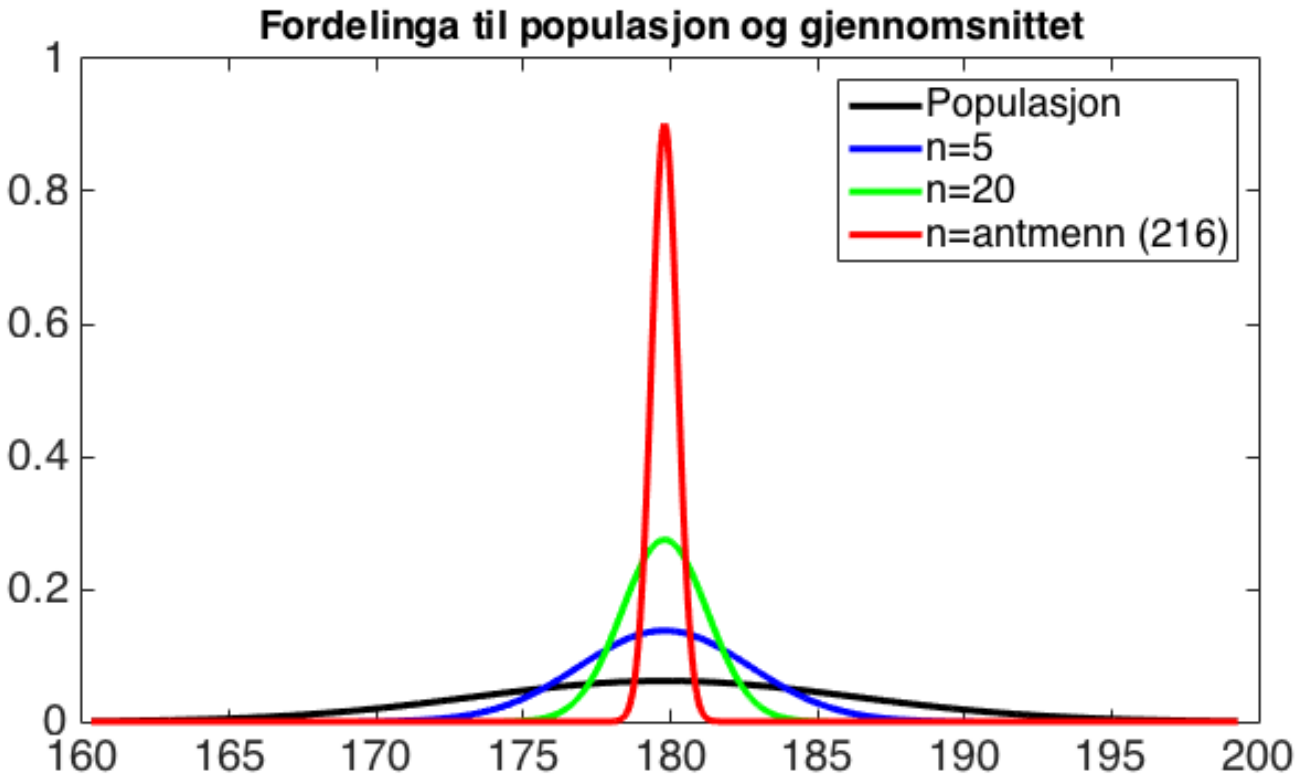




Dersom X_i er normalfordelt, og kjent varians

$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, for $i = 1, 2, \ldots n$. Dvs eit utvalg på n.
Då er

$$\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$$



Sentralgrenseteoremet, teorem 8.2

La X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ vere uavhengige identisk fordelte (u.i.f.) stokastiske vaiable med $E(X_i) = \mu$ og $Var(X_i) = \sigma^2 < \infty$ (endeleg varians). La $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ og $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}$. Då

$$Z \to N(0, 1)$$

når $n \to \infty$.
Dette tilsvarer

$$\bar{X} \to N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

når $n \to \infty$.

PS: Gjeld uansett fordeling for X_i.
PSS: $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}$ er og ein observator

Viktige observatorar

Dersom $X_i \overset{u.i.f.}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$, kjent σ^2 eller pga SGT

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

Dersom $X_i \overset{u.i.f.}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ og $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim T_{n-1}$$

Student-t fordelt med $\nu = n - 1$ fridomsgrader.

Dersom $X_i \overset{u.i.f.}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ og $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$

$$X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

Kji-kvadrat fordelt med $\nu = n - 1$ fridomsgrader.

Kap. 9: Estimering

- Antar fordeling frå kjennskap til fenomenet; $X_i \sim f(x;\theta)$.
- Har data $x_1, x_2, \ldots, x_n$
- *Estimerer/ berekner* θ frå data v.h.a. ein *estimator* $\hat{\theta}$.

- Kva er ein god estimator (forventningsrett og minst mogeleg varians).
- Korleis finne ein estimator (SME eller for lineær regresjon MKM)
- Korleis kvantifisere usikkerheita i estimat (Konfidensintervall)

Konfidensintervall: Dersom forsøket blir repetert, vil sann parameter vere i KI i $1-\alpha$ del av forsøk.

Sannsynsmaksimeringsestimator, SME

Finn den verdien for parameteren θ (påske-eksempel $\theta = p$) som gjev høgast sannsyn for å observere dei dataene vi har observert.

Korleis

1. Finn likelihoodfunksjonen
   $L(\theta; x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$
   Sannsynet /sanns.tettheten for våre data.
2. Finn toppunkt av likelihoodfunksjonen: $\underset{\theta}{argmax} L(\theta; x_1, \ldots, x_n)$

August 2012 oppgåve 3b

Sannsynsmaksimeringsestimator, SME

Finn den verdien for parameteren θ (juleferie eksempel $\theta = p$) som gjev høgast sannsyn for å observere dei dataene vi har observert.

OPPSKRIFT

1. Finn likelihoodfunksjonen

   $L(\theta; x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) \overset{uavh}{=} \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta)$

2. Finn toppunkt av likelihoodfunksjonen:
   - Tar ln av L; $l(\theta; x_1, x_2, \ldots, x_n) = \ln(L(\theta; x_1, x_2, \ldots, x_n))$. *Reknetriks som nesten alltid blir brukt. L og l har same toppunkt.*
   - Deriverer og set lik 0; $\frac{\partial}{\partial \theta} l(\theta; x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$
   - Løyser ut for $\theta = h(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

3. Estimator: $\hat{\theta} = h(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ (stok.var.)
   Estimat: $\theta^* = h(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (talverdi)

Konfidensintervall

Har eit nivå av trygghet for at sann parameter ligg i intervallet.

1. Finn estimator for parameteren vi ønsker å finne KI for.
2. Finn observator der parameter av interesse og estimator inngår:
   - $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$,

     når SGT eller $X_i \overset{u.i.f.}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$
   - $T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$,

     når $X_i \overset{u.i.f.}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ og $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$
   - $X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$,

     når $X_i \overset{u.i.f.}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ og $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$
3. Har at (f.eks) $P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$.
4. Løyser ut for parameter, (f.eks. μ); $P(\hat{\mu_L} < \mu < \hat{\mu_U}) = 1 - \alpha$.
5. Konfidensintervall; sett inn for data: $[\mu^*_L, \mu^*_U]$

Hypotesetesting

- H_0: Null hypotese. Konservativ. (f.eks. $\mu = \mu_1$
- H_1: Alternativ hypotese. Endring. (f.eks. $\mu < \mu_1$)

Moglege beslutningar

- Forkastar H_0, og aksepterer H_1.
  Påstand H_1 'bevist' ved data.
- Forkaster ikkje H_0.
  Data underbygger ikkje påstand H_1.

Beslutningsfeil

- *Type-I-feil*: Forkastar H_0 når H_0 er sann.
- *Testnivå*: $P(\text{Type-I-feil}) = \alpha$.
- *Type-II-feil*: Forkastar ikkje H_0 når H_1 er sann.
- *Teststyrke*: 1 - $P(\text{Type-II-feil}|\mu = \mu_1) = 1 - \beta(\mu_1)$

Hypotesetesting

Metode p-verdi

1. Antar H_0 er sann.
2. Finn *p-verdi*: $P(\text{vårt estimat eller meir ekstremt} \mid H_0 \text{ er sann})$
3. Forkastar H_0 dersom liten p-verdi ($< \alpha$).

Metode forkastninsområde

1. Antar H_0 er sann.
2. Finn testobservator og område for 'testobservasjon' (evt. estimat) som fører til forkasting.
3. Forkastar H_0 dersom 'testobservasjon'/estimat i forkastningsområdet.

Enkel lineær regresjon

$$Y_i = \alpha + \beta x_i + \epsilon_i \text{ med } \epsilon_i \overset{u.i.f.}{\sim} N(0, \sigma_\epsilon^2)$$

- Finne estimatorer / estimere α, β og σ_ϵ^2 (for α og β SME eller MKM, for σ^2 SME)
- Hypotesetest / KI for α, β eller σ_ϵ^2
- Hypotesetest / KI for $\mu_{Y_0|x_0} = E(Y|x = x_0)$
- Prediksjonsintervall for $Y_0|x_0$

Eksamen Mai 2014 2 c), d) og e)

Estimatorar lineær regresjon

- $A = \bar{Y} - B\bar{x}$ og $A \sim N(\alpha, \sigma_A^2)$
  - der $\sigma_A^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}\sigma_\epsilon^2$
- $B \sim N(\beta, \sigma_B^2)$
  - der $\sigma_B^2 = Var(B) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sigma_\epsilon^2}{S_{xx}}$
- $S_\epsilon^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n-2}$
  - der $\hat{Y}_i = A + Bx_i$ og $\frac{(n-2)S^2}{\sigma_\epsilon^2} \sim \chi_{n-2}^2$

Lykke til på ferden!

- Lykke til med eksamensperioden!
- Lykke til med vidare bruke av statistikk!
- Vil du lære meir?
  - TMA4255 Anvendt statistikk (vår)
  - TMA4267 Lineære statistiske modeller (vår)
  - TMA4265 Stokastiske prosesser (haust)
  - ?????? Statistisk Maskinlæring (første gong våren 2018)

Takk for meg!