Plan for dagen

Bli ferdig med *Kapittel 10 Hypotesetesting*

- Hypotesetest forventning (når gjennomsnitt normalfordelt pga SGT eller fordi data frå normalfordeling)
  - Eit utval, kjent varians (Kap. 10.4)
  - Eit utval, ukjent varians (Kap. 10.4)
  - To utval, kjent varians (Kap. 10.5)
  - To utval, lik ukjent varians (Kap. 10.5) IKKJE PENSUM
  - To utval ukjent varians (Kap. 10.5)
  - Para utval (Kap. 10.5)
- Oversiktstabell
- Kahoot

Hypotesetesting

- H_0: Null hypotese. Konservativ.
- H_1: Alternativ hypotese. Endring.

Moglege beslutningar

- Forkastar H_0, og aksepterer H_1.
- Forkaster ikkje H_0.
  Er ikkje tilstrekkeleg usannsynleg at tiltalte er uskyldig.

Beslutnigsfeil:

- *Type-I-feil*: Forkastar H_0 når H_0 er sann.
- *Testnivå*: $P(\text{Type-I-feil}) = \alpha$.
- *Type-II-feil*: Forkastar ikkje H_0 når H_1 er sann.
- *Teststyrke*: 1 - $P(\text{Type-II-feil}|\mu = \mu_1) = 1 - \beta(\mu_1)$

Hypotesetesting

Metode p-verdi

1. Antar H_0 er sann.
2. Finn *p-verdi*: P(vårt estimat eller meir ekstremt $\mid$ H_0 er sann)
3. Forkastar H_0 dersom liten p-verdi ($< \alpha$).

Metode forkastninsområde

1. Antar H_0 er sann.
2. Finn testobservator og område for 'testobservasjon' (evt. estimat) som fører til forkastning.
3. Forkastar H_0 dersom 'testobservasjon'/estimat i forkastningsområdet.

Viktige observatorar

Dersom $X_i \overset{u.i.f.}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$, kjent σ^2 eller pga SGT

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

Dersom $X_i \overset{u.i.f.}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ og $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim T_{n-1}$$

Student-t fordelt med $\nu = n - 1$ fridomsgrader.

Dersom $X_i \overset{u.i.f.}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ og $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$

$$X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

Kji-kvadrat fordelt med $\nu = n - 1$ fridomsgrader.

Eksempel: Høgde hypotese

Påstand: Ingelin er høgare enn gj.snittlege NTNU kvinne.
μ: gj.snitt for NTNU kvinner.
$\mu_1 = 172$: høgde Ingelin

Hypoteser

- H_0: $\mu = \mu_0 = 172$
- H_1: $\mu < \mu_0$

Moglege beslutningar

- Forkastar H_0, og aksepterer H_1.
  Data sannsynleggjer at påstand er sann.
- Forkaster ikkje H_0.
  Data underbygger ikkje påstand.

Eksempel Høgde hypotese, case 1 og 2

Høgde kvinnelege NTNU-studentar

DATA

- CASE 1
  - $n = 149$, $\bar{x} = 169.5$,
- CASE 2
  - n=5, $\bar{x} = 169.5$,

ANTAR

- $X_i \overset{u.i.f.}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ for $i = 1, 2, \ldots, n$, kjent varians $\sigma^2 = 6.5^2$

TESTER:

- $\hat{\mu} = \bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$. Under H_0: $\bar{X} \sim N(\mu_0, \sigma^2/n)$
- CASE 1: p-verdi: 10^{-5}, $x_{grense} = 171.1$
  $(Var(\hat{\mu}) = 6.5^2/149 = 0.5^2) \Rightarrow$ **forkaster** H_0
- CASE 2: p-verdi: 0.19, $x_{grense} = 167.2$
  $(Var(\hat{\mu}) = 6.5^2/5 = 2.9^2) \Rightarrow$ **forkaster ikkje** H_0

Eksempel høgde, ukjent varians, case 2

Hypoteser

- H_0: $\mu = \mu_0 = 172$
- H_1: $\mu < \mu_0$

DATA

- CASE 2
  - n=5
  - $\bar{x} = 169.1$, estimert varians $s^2 = 6.5^2$

ANTAR

- $X_i \overset{u.i.f.}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ for $i = 1, 2, \ldots, n$

OBSERVATOR OG FORKASTNINGSOMRÅDE

- $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$, forkastar H_0 når $t_{obs} < -t_{\alpha,n-1}$
- CASE 2: $t_{obs} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = -1.08$ og $t_{0.05,4} = 2.132$. $\Rightarrow$ **Forkastar ikkje H_0**

Fiskekvalitet

- μ_1: Gj.snitt kvalitet på fisk, tradisjonell lagring.
- μ_2: Gj.snitt kvalitet på fisk, ny lagring.

Ny metode betre kvalitet?

Hypoteser

- H_0: $\mu_1 = \mu_2$
- H_1: $\mu_2 > \mu_1$

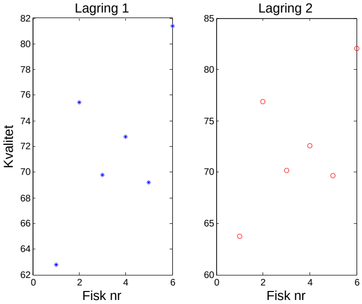
Data

- Metode 1: $n_1 = 6$, $\bar{x}_1 = 71.9$ og $s_1^2 = 6.3^2$
- Metode 2: $n_2 = 6$, $\bar{x}_2 = 72.5$ og $s_2^2 = 6.5^2$

Moglege beslutningar

- Forkastar H_0, og aksepterer H_1.
  Det er ulik kvalitet. Innfører ny lagringsmetode.
- Forkaster ikkje H_0. Fortsett som før.

Lagring av fisk



Fiskehypotese, kjent varians (to utval, kjent varians)

Metode 1: $X_{1i} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $i = 1, 2, \ldots n_1$ data
Metode 2: $X_{2i} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, $i = 1, 2, \ldots n_2$ data

Hypoteser

- H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$
- H_1: $\mu_1 - \mu_2 < 0$

Testobservator (jf Kap 9): $Z = \dfrac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}} \sim N(0, 1)$

Fiskehypotese, kjent varians (to utval, kjent varians)

Metode 1: $X_{1i} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $i = 1, 2, \ldots n_1$ data
Metode 2: $X_{2i} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, $i = 1, 2, \ldots n_2$ data

Hypoteser

- H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$
- H_1: $\mu_1 - \mu_2 < 0$

Testobservator (jf Kap 9): $Z = \dfrac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}} \sim N(0, 1)$

Finn forkastningsområde

- Under H_0: $Z = \dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}} \sim N(0, 1)$
- Forkaster H_0 dersom $z_{obs} = \dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}} < -z_\alpha$

Kan vise at

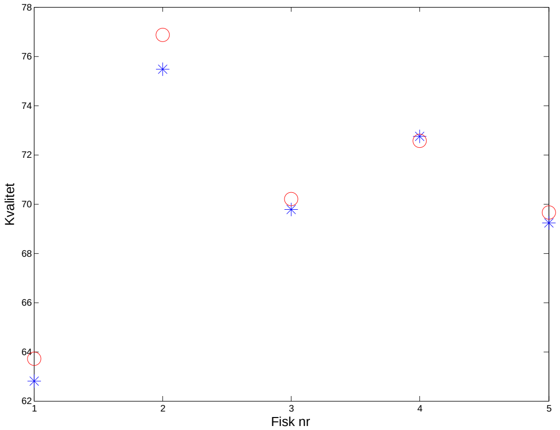
$$T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2}} \overset{approx}{\sim} T_\nu$$

Fridomsgrader to utval med ulik varians

$$\nu = \frac{(s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2)^2}{\frac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1 - 1} + \frac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2 - 1}}$$

ν estimat, rund ned til nærmaste heiltal.

Lagring av fisk, differansar



Fiskehypotese, differansar ($D_i = X_{i1} - X_{i2}$)

Data: $\bar{d} = -0.6,\ i = 1, \ldots n = 6,\ s_d^2 = 0.5^2$

Hypoteser

- H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$, H_1: $\mu_1 - \mu_2 < 0$

Forkastningsområde

- Testobservator (jf Kap 9): $T = \dfrac{\bar{D} - d_0}{S_d/\sqrt{n}} \sim T_{n-1}$
- Under H_0: $T = \dfrac{\bar{D}}{S_d\sqrt{n}} \sim T_{n-1}$

  $P(T < -t_{\alpha,n-1}) = \alpha$
- Forkaster H_0 dersom $t_{obs} = \dfrac{\bar{d}}{s_d\sqrt{n}} < -t_\alpha$
- $t_{obs} = -2.87$, $t_{0.05,5} = 2.015$ (tabell) $\Rightarrow$ **Forkastar** H_0

Test for ein andel, Eksempel

Hypotese: Dei fleste studentar har ikkje tilgong på bil.

- $H_0 : p = p_0 = 0.5$
- $H_1 : p < p_0$

Der p er andelen som har tilgong på bil.
DATA: Spør n, x har tilgong på bil.
MODELL: $X \sim Bin(n, p)$

- $\hat{p} = X/n$
- For n stor nok ($np > 5$ og $n(1-p) > 0$) $\hat{p} \sim N(p, p(1-p)/n)$

Eksamen juni 07, pengespelet

- Spm.lagar A: Tilfeldig deltakar klarar < 5 med sanns. q_1.
- Spm.lagar B: Tilfeldig deltakar klarar < 5 med sanns. q_2.

Utled tilnærma 95% KI for $d = q_1 - q_2$ basert på normaltilnærming til binomisk.

- $Z_1 \sim bin(n_1, q_1)$, stor n_A, $Z_1 \overset{approx}{\sim} N(n_1 q_1, n_1 q_1(1-q_1))$
- $Z_2 \sim bin(n_2, q_2)$, stor n_B, $Z_2 \overset{approx}{\sim} N(n_2 q_2, n_2 q_2(1-q_2))$
- $\hat{q}_1 = Z_1/n_1 \overset{approx}{\sim} N(q_1, q_1(1-q_1)/n_1)$
- $\hat{q}_2 = Z_2/n_2 \overset{approx}{\sim} N(q_2, q_2(1-q_2)/n_2)$
- $\hat{d} = \hat{q}_1 - \hat{q}_2 \overset{approx}{\sim} N(q_1 - q_2, q_1(1-q_1)/n_1 + q_2(1-q_2)/n_2))$
- $Z = \dfrac{\hat{d} - d}{\sqrt{q_1(1-q_1)/n_1 + q_2(1-q_2)/n_2)}}$

Lært i dag

Ser på normalfordelte gjennomsnitt (pga SGT eller fordi data frå normalfordeling)

- Eit utval, kjent varians. Observator: Z
- Eit utval, ukjent varians, norm.ford. data. Observator: T
- To utval, kjent varians, norm.ford. data. Observator: Z
- To utval ukjent varians, norm.ford. data. Observator: T
- Para utval, norm.ford. data. Observator: T