Kapittel 5, Diskret Sannsynsfordelingar

- Sjå på eit utval av ofte brukte diskret sannsynsfordelingar
  - Binomisk (Bernoulli prosess) **Onsdag**
  - Multinomisk **Onsdag**
  - Hypergeometrisk **Onsdag**
  - Geometrisk
  - Negativ binomisk
  - Poisson
- Prosserar desse beskriv
  - Bernoulli prosess **Onsdag**
  - Poisson prosess
- Nokre eigenskapar
  - $E(X)$ og $Var(X)$

Diskret sannsynsfordeling

Diskret stokastisk variabel

Eit stokastisk variabel som gjev eit endeleg eller tellbart antall utfall.

Definisjon diskret sannsynsfordeling

Paret $(x, f(x))$ blir kalla sannsynsfordelinga til den diskret stok. var. X dersom

1. $0 \leq f(x)$
2. $\sum_{\forall x} f(x) = 1$ (summen over alle mogelege x)
3. $f(x) = P(X = x)$

Bernoulli prosess og binomisk fordeling

Bernoulli prosess (= trekking med tilbakelegging)

1. n uavhengige forsøk
2. Kvart forsøk resulterer i suksess, $I_i = 1$ eller ikkje-suksess $I_i = 0$.
3. Suksess-sannsynet $p = P(I_i = 1)$ er konstant.

Binomisk fordeling

Ser på antall suksess i ein Bernoulli prosess, $X = \sum_{i=1}^{n} I_i$. X er då binomisk fordelt;

$$P(X = x) = b(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Trekking utan tilbakelegging

- Urne med N kuler.
- k blåe kuler (suksess)
- $N - k$ raude kuler (ikkje-suksess)
- Trekker n kuler
- X er antall av dei trekte som er blåe (suksess).

Definisjon hyper-geometrisk

$$f(x; N, n, k) = h(x; N, n, k) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Geometrisk fordeling (Kap 5.4)

Geometrisk fordeling

Dersom vi har uavhengige forsøk, kvar med suksess sannsyn p og ikkje-suksess sannsyn $q = 1 - p$, og lar X vere antallet forsøk tom første suksess, så er X geometrisk fordelt med sannsynsfunksjon

$$f(x; p) = g(x; p) = (1 - p)^{x-1} p$$

Forventning og varians, teorem 5.3

Dersom X er geometrisk fordelt med parameter p, så er

$$\mu = E(X) = \frac{1}{p}$$

$$\sigma^2 = Var(X) = \frac{1 - p}{p^2}$$

Eks: Treng 6-ar, kor mange kast?

Negativ binomisk fordeling (Kap 5.4)

Negativ binomisk fordeling

Dersom vi har uavhengige forsøk, kvar med suksess sannsyn p, og lar X vere antallet forsøk tom k-te suksess, så er X negativ binomisk fordelt med sannsynsfunksjon

$$f(X; k, p) = \binom{x-1}{k-1} p^k (1-p)^{x-k}$$

for $x = k, k+1, \ldots$

Forventning og varians

Dersom X er negativ binomisk fordelt med parametre k og p, så er

$$\mu = E(X) = \frac{k}{p}$$

$$\sigma^2 = Var(X) = k\frac{1-p}{p^2}$$

1. Talet på hendingar som inntreff i eit tidsintervall er uavhengig av talet på hendingar som inntreff i disjunkte tidsintervall.
2. Sannsynet for at ei hending inntreff i eit kort tidsintervall er lineært med lengda på tidsintervallet, og er uavhengig av om det inntreff hendingar før eller etter intervallet.
3. Sannsynet for at det inntreff meir enn ei hending innanfor eit lite tidsintervall er neglisjerbart.

PS: Kan bytte ut tid med distanse, areal, volum,

Eksempel Poisson-prosessar

- Antall jordskjelv
- Antall bakteriar i ei prøve
- Antall α-partiklar i bakgrunnsstråling
- Antall pasientar innlagt på ei sjukehusavdeling
- Antall aviser solgt i ein butikk
- Antall ulykker på ei vegstrekning
- Antall strømbrudd

Poissonfordeling

La X vere talet på hendingar i eit tidsintervall t. X er poissonfordelt dersom sannsynsfordelinga er

$$f(x; \lambda t) = p(x; \lambda t) = \frac{\exp(-\lambda t)(\lambda t)^x}{x!}$$

der λ er gjennomsnittleg antall hendingar per tidseining (f.eks. time).

Bruker ofte $\mu = \lambda t$, f.eks. i tabellen.

Forventning og varians, teorem 5.4

Dersom X er poissonfordelt med parameter λt, så er

$$E(X) = \lambda t$$

$$Var(X) = \lambda t$$

- Sjå på eit utval av ofte brukte diskret sannsynsfordelingar
  - **Binomisk** (antall suksess, Bernoulli prosess / trekking med tilbakelegging)
  - **Multinomisk** (antall i kategoriar, Multinomisk prosess)
  - **Hypergeometrisk** (antall suksess, trekking utan tilbakelegging)
  - **Geometrisk** (antal forsøk til første suksess i Bernoulli prosess)
  - **Negativ binomisk** (antall forsøk til k-te suksess i Bernoulli prosess)
  - **Poisson** (possionprosess)