

Kap 4: Matematisk forventning

Viktige omgrep

- Forventningsverdi (tirsdag)
- Varians / standard avvik (i dag)
- Kovarians / korrelasjon (i dag)

Viktige reknereglar

Forventning til lineærkombinasjon:

$$E(a_0 + a_1X_1 + \dots + a_nX_n) = a_0 + a_1E(X_1) + \dots + a_nE(X_n)$$

Varians til lineærkombinasjon:

Definisjon 4.1

La X vere ein stok.var. med sannsynsfordeling $f(x)$.
Forventningsverdien til X er då

$$\mu = E(X) = \sum_{\forall x} xf(x)$$

dersom X er diskret, og

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

dersom X er kontinuierleg.

Tolkning:

- Gjennomsnitt av uendeleg mange data trukke frå $f(x)$
- Massesenteret til fordelinga.

Teorem 4.1

For ein funksjon $g(X)$;

$$\mu_{g(X)} = E(g(X)) = \sum_x g(x)f(x)$$

for diskret X , og

$$\mu_{g(X)} = E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$$

for kontinuerleg X .

Definisjon 4.3

La X vere ein stok. var. med forventning μ . Variansen til X er då:
For diskret X :

$$\text{Var}(X) = E((X - \mu)^2) = \sum_{\forall x} (x - \mu)^2 f(x)$$

For kontinuerleg X :

$$\text{Var}(X) = E((X - \mu)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$$

Tolkning Spredning, $\text{Std}(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$ same skala som X .

Eigenskap Må vere positiv (eller 0).

Er interessert i kostnaden på leigebil i ferien.

Pris:

- Fast pris: $a = 500 \text{ €}$
- Km pris: $b = 0.2 \text{ €/ km}$

Her ei sannsynsfordeling $f(x)$ på lengda X som skal kjørast.

- $E(X) = 2000 \text{ km}$
- $\text{Var}(X) = (500 \text{ km})^2$

Kostnad

$$Y = a + bX$$

Teorem 4.5 og Korollar 4.8, VIKTIG

La X vere ein stok. var. med $E(X) = \mu_X$ og $Var(X) = \sigma_X^2$, og la $Y = a + bX$, der a og b er kjende konstantar. Då er;

$$E(Y) = a + b\mu_X$$

$$Var(Y) = b^2\sigma_X^2$$

Teorem 4.2

Variansen til ein stokastisk variabel X er;

$$\sigma^2 = E(X^2) - E(X)^2$$

Ofte enklare å bruke enn definisjonen direkte.

Definisjon 4.4

La X og Y vere stokastiske variable med simultan sannsynsfordeling $f(x, y)$, og forventning hhv μ_x og μ_y .

Kovariansen til X og Y er då:

$$\text{Cov}(X, Y) = \sigma_{xy} = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$$

For kontinuerleg X og Y :

$$\text{Cov}(X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)(y - \mu_Y)f(x, y)dx dy$$

For diskret X og Y :

$$\text{Cov}(X, Y) = \sum_{\forall x} \sum_{\forall y} (x - \mu_X)(y - \mu_Y)f(x, y)$$

$$\sigma_{xy} = E(XY) - \mu_x \mu_y$$

Definisjon 4.5

La X og Y vere stokastiske variable med varians hhv σ_X^2 og σ_Y^2 , og kovarians σ_{XY} . Korrelasjonskoeffisientent til X og Y er då;

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Eigenskap:

$$-1 \leq \rho \leq 1$$

Korrolar 4.5

Dersom X og Y er uavhengige stokastiske variable, så er kovariansen og korrelasjonen null; $\sigma_{XY} = \rho_{XY} = 0$.

Så:

$$\text{uavhengigheit} \Rightarrow \sigma_{XY} = 0$$

MEN:

$$\sigma_{XY} = 0 \nRightarrow \text{uavhengigheit}$$

Korrelasjon og kovarians er eit mål på **lineær** avhengigheit.

Eksempel, berehjelp for mormor 1

Eg er med mormor på butikken som berehjelp. Kor mykje må eg bere?

Ho kjøper:

- alltid 2 liter melk ($a = 2kg$)
- X pakkar mjøl, kvar på $b = 2kg$
- Y pakkar sukker, kvar på $c = 1kg$

Veit at:

- $E(X) = \mu_X = 1.5$ og $Var(X) = \sigma_X^2$
- $E(Y) = \mu_Y = 2$ og $Var(Y) = \sigma_Y^2$

Totalt å bere:

$$Z = a + bX + cY$$

$$E(Z) = a + b\mu_X + c\mu_Y$$

Teorem, VIKTIG

Dersom $a_0, a_1, \dots, a_n$ er konstanter og $X_1, X_2, \dots, X_n$ stok. var., så er

$$E(a_0 + \sum_{i=1}^n a_i X_i) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i E(X_i)$$

og

$$\text{Var}(a_0 + \sum_{i=1}^n a_i X_i) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} a_i a_j \text{Cov}(X_i, X_j)$$

for **uavhengige** $X_1, \dots, X_n$ er

$$\text{Var}(a_0 + \sum_{i=1}^n a_i X_i) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \text{Var}(X_i)$$

Eksempel, berehjelp for mormor 2

Eg er med mormor på butikken som berehjelp. Kor mykje må eg bere?

Ho kjøper fisk og kjøt i ferskdisken for ei heil veke:

- X kg fisk
- Y kg kjøt

Veit at:

- $E(X) = \mu_X = 1\text{kg}$ og $\text{Var}(X) = \sigma_X^2$
- $E(Y) = \mu_Y = 1\text{kg}$ og $\text{Var}(Y) = \sigma_Y^2$

Totalt å bere:

$$Z = X + Y$$

Kap 4: Matematisk forventning

Viktige omgrep

- Forventningsverdi
- Varians / standard avvik
- Kovarians / korrelasjon

Viktige rekneregler

Forventning til lineærkombinasjon:

$$E(a_0 + a_1 X_1 + \dots + a_n X_n) = a_0 + a_1 E(X_1) + \dots + a_n E(X_n)$$

Varians til lineærfunksjon:

$$\text{Var}(a + bX_1) = b^2 \text{Var}(X_1)$$

Dersom $X_1, X_2, \dots, X_n$ er **uavhengige**:

$$\text{Var}(a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n) = a_1^2 \text{Var}(X_1) + a_2^2 \text{Var}(X_2) + \dots + a_n^2 \text{Var}(X_n)$$

Kun for lineær kombinasjonar....

fristelsar.....

$$Z = X/Y$$

$$E(Z) \neq \frac{E(X)}{E(Y)}$$

...only the hard way...

Må bruke definisjonen på forventning for funksjon av to stok.var.
Kan evt. approksimere vha Taylorrekker, eller simulere.