Kapittel 6, Kontinuerlege Sannsynsfordelingar

- Sjå på eit utval av ofte brukte kontinuerlege sannsynsfordelingar
  - Uniform
  - Normal
  - Eksponensial
  - Gamma
  - (Kji-kvadrat)
- Nokre eigenskapar
  - $E(X)$ og $Var(X)$
- Samanheng mellom fordelingar

Kontinuerleg sannsynsfordeling

Definisjon

Funksjonen $f(x)$ definert for alle reelle tal $x \in \Re$ blir kalla sannsynsfordelinga til den kontinuerlege stok. var. X dersom

- $0 \leq f(x)$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
- $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$

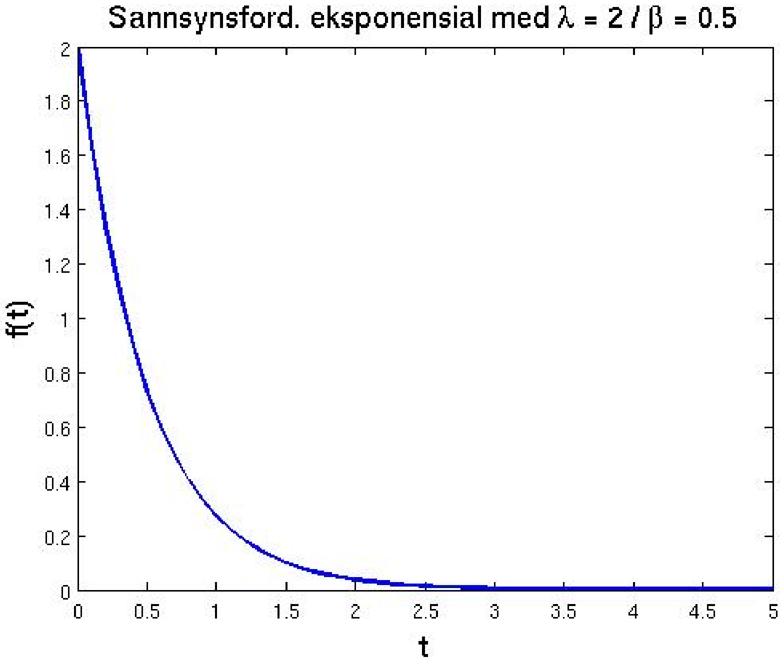
Poissonprosess og fordeling

Poissonprosess:

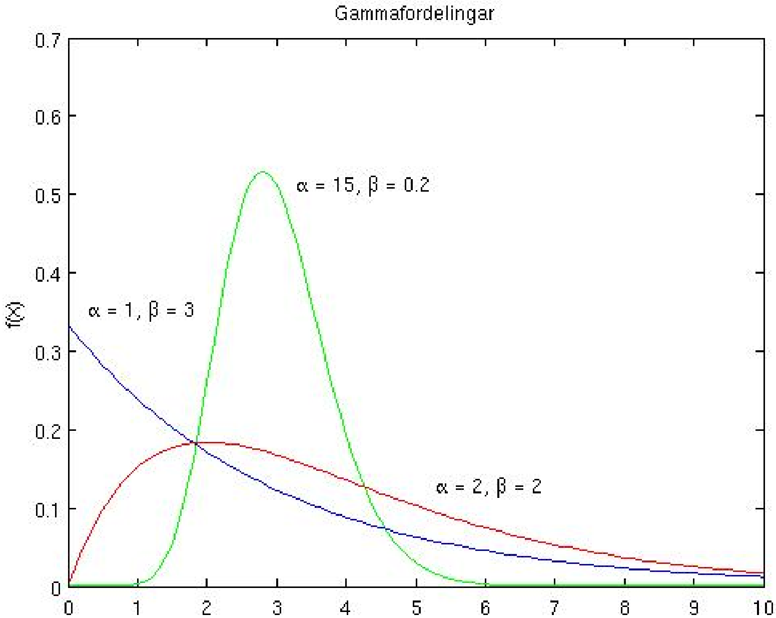
- Talet på hendingar som inntreff i eit intervall er uavhengig av talet på hendingar som inntreff i disjunkte intervall.
- Sannsynet for at ei hending inntreff i eit lite intervall er lineært med lengda på intervallet, og er uavhengig av om det inntreff hendingar før eller etter intervallet.
- Sannsynet for at meir enn ei hending inntreff i eit lite intervall er neglisjerbart.

Poissonfordeling

$$p(x; \lambda t) = \frac{\exp(-\lambda t)(\lambda t)^x}{x!}$$


Sannsynsford. eksponensial med λ = 2 / β = 0.5
f(t)
t
2
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5

Gammafordeling



Spesialtilfeller gammafordeling

$$X \sim Ga(\alpha, \beta)$$

$$\begin{aligned}
\alpha = 1: &\quad \text{Eksponensial med parameter } \beta \\
\beta = 2 \text{ og } \alpha = \nu/2: &\quad \chi^2\text{-fordelt med parameter } \nu \\
\alpha \to \infty: &\quad \Rightarrow X \to N(\alpha\beta, \alpha\beta^2)
\end{aligned}$$

Bruksområde gammafordeling

- Når andre ikkje passar (f.eks. mengde nedbør per månad)
- Kan vise at ventetida til hending nr α i ein Poisson-prosess med intensitet λ er $Ga(\alpha, \beta = 1/\lambda)$
- χ^2-fordeling: I samband med estimering av varians.

χ^2 fordeling

Notasjon: $X \sim \chi^2_\nu$

Eigenskapar:

- $E(X) = \nu$
- $Var(X) = 2\nu$
- Dersom $Z \sim N(0,1)$, så er $Z^2 \sim \chi^2_\nu$

Bernoulli prosess

1. n uavhengige forsøk
2. Kvart forsøk resulterer i suksess, $I_i = 1$ eller ikkje-suksess $I_i = 0$.
3. Suksess-sannsynet $p = P(I_i = 1)$ er konstant.

Bernoulli prosess = trekking med tilbakelegging

Binomisk fordeling

Ser på antall suksess i ein Bernoulli prosess, $X = \sum_{i=1}^{n} I_i$. X er då binomisk fordelt;

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}$$

- Urne med N kuler.
- k blåe kuler (suksess)
- $N - k$ raude kuler (ikkje-suksess)
- Trekker n kuler
- X er antall av dei trekte som er blåe (suksess).

Definisjon hyper-geometrisk

$$f(x; N, n, k) = h(x; N, n, k) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Kap 5.5 Poisson prosess

1. Talet på hendingar som inntreff i eit tidsintervall er uavhengig av talet på hendingar som inntreff i disjunkte tidsintervall.
2. Sannsynet for at ei hending inntreff i eit kort tidsintervall er lineært med lengda på tidsintervallet, og er uavhengig av om det inntreff hendingar før eller etter intervallet.
3. Sannsynet for at det inntreff meir enn ei hending innanfor eit lite tidsintervall er neglisjerbart.

PS: Kan bytte ut tid med distanse, areal, volum.

Poissonfordeling

La X vere talet på hendingar i eit tidsintervall t. X er poissonfordelt dersom sannsynsfordelinga er

$$f(x; \lambda t) = p(x; \lambda t) = \frac{\exp(-\lambda t)(\lambda t)^x}{x!}$$

der λ er gjennomsnittleg antall hendingar per tidseining (f.eks. time).

Oppsummering

Normalfordeling

$$f(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\exp(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2)$$

for $-\infty < x < \infty$

- $E(X) = \mu$ og $Var(X) = \sigma^2$
- $Y = a + bX, \; Y \sim N(a + bE(X), b^2 Var(X))$
- Z er standard normalfordelt dersom $Z \sim N(0, 1)$
- Kummulativ fordeling for standard normalfordeling er tabulert.

- Sjå på eit utval av ofte brukte kontinuerlege sannsynsfordelingar
  - Uniform
  - Normal
  - Eksponensial
  - Gamma
  - (Kji-kvadrat)
  - (Student-T)
- Samanheng mellom fordelingar
- Nokre eigenskapar
  - $E(X)$ og $Var(X)$