

# TMA4240 Statistikk H2004: Ordningsvariabler og ekstremvariabler

## 1 Ordningsvariabler

La  $X_1, X_2, \dots, X_n$  være uavhengige, identisk fordelte stokastiske variable med fordeling  $f_X(x)$  og kumulativ fordeling  $F_X(x) = P(X \leq x)$ .

Vi ordner  $X_i$ -ene etter størrelse og betegner dem  $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$ , hvor

$$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(k)} \leq \dots \leq X_{(n)}.$$

Vi kaller  $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$  ordningsvariabler.

Spesielt definerer vi ekstremvariablene

$$\begin{aligned} X_{(1)} &= \min(X_1, X_2, \dots, X_n) \\ X_{(n)} &= \max(X_1, X_2, \dots, X_n). \end{aligned}$$

Medianen er definert ved:

$$\tilde{X} = \begin{cases} X_{((n+1)/2)} & \text{hvis } n \text{ er oddetall} \\ \frac{1}{2}(X_{(n/2)} + X_{(n/2+1)}) & \text{hvis } n \text{ er partall} \end{cases}$$

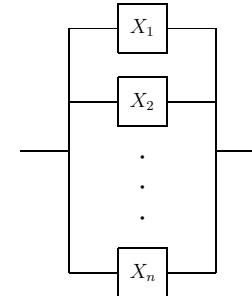
Variasjonsbredden ("range" på engelsk) er definert ved:  $X_{(n)} - X_{(1)}$ .

## 2 Maksimum

### 2.1 Parallellsystem og maksimum

I systemer eller delsystemer der det stilles høye krav til at systemet skal virke kobles ofte komponenter i parallell:

Systemet virker så lenge minst en av komponentene virker. Levetiden til systemet blir  $V = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ .



### 2.2 Fordelingen til maksimum

Fordelingen til  $V = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$  kan finnes ved å benytte at den største av  $X_i$ -ene er mindre enn eller lik  $v$  hvis og bare hvis alle  $X_i$ -ene er mindre enn eller lik  $v$ :

$$\begin{aligned} F_V(v) = P(V \leq v) &= P(\max(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq v) \\ &= P((X_1 \leq v) \cap (X_2 \leq v) \cap \dots \cap (X_n \leq v)) \\ &\stackrel{\text{uavh.}}{=} P(X_1 \leq v) \cdot P(X_2 \leq v) \cdots P(X_n \leq v) \\ &= [F_X(v)]^n \end{aligned}$$

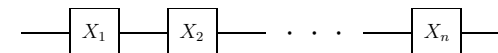
Hvis  $X$  er kontinuerlig fordelt blir:

$$f_V(v) = \frac{d}{dv} F_V(v) = n[F_X(v)]^{n-1} f_X(v)$$

## 3 Minimum

### 3.1 Seriesystem og minimum

La oss se på levetiden til et system sammensatt av komponenter med uavhengige levetider. I første omgang ser vi på et system som virker hvis og bare hvis samtlige komponenter virker. Dette kan illustreres ved en seriekobling:



La  $X_i$  være levetiden til komponent nr  $i$ . Systemet fungerer frem til første komponent svikter. Da er levetiden til systemet  $U = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ .

### 3.2 Fordelingen til minimum

Fordelingen til  $U = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$  blir på tilsvarende måte:

$$\begin{aligned} F_U(u) = P(U \leq u) &= P(\min(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq u) \\ &= 1 - P(\min(X_1, X_2, \dots, X_n) > u) \\ &= 1 - P((X_1 > u) \cap (X_2 > u) \cap \dots \cap (X_n > u)) \\ &\stackrel{\text{uavh.}}{=} 1 - P(X_1 > u) \cdot P(X_2 > u) \cdots P(X_n > u) \\ &= 1 - [1 - F_X(u)]^n \end{aligned}$$

Hvis  $X$  er kontinuerlig fordelt blir:

$$f_U(u) = \frac{d}{du} F_U(u) = n[1 - F_X(u)]^{n-1} f_X(u)$$

### 3.3 Eksponensialfordeling og minimum:

La  $X_1, X_2, \dots, X_n$  være uavhengige, eksponensialfordelte levetider med forventning  $\beta$ . Dvs  $f_X(x) = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}}$  for  $x \geq 0, \beta > 0$ . Fordelingen til  $U = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$  blir:

$$\begin{aligned} F_U(u) = P(U \leq u) &= P(\min(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq u) \\ &= 1 - [1 - F_X(u)]^n \\ &= 1 - \left[1 - \int_0^u f_X(x) dx\right]^n \\ &= 1 - \left[1 - \int_0^u \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}} dx\right]^n \\ &= 1 - [1 - (1 - e^{-\frac{u}{\beta}})]^n \\ &= 1 - e^{-\frac{nu}{\beta}} \quad \text{for } x > 0 \end{aligned}$$

Altså er levetiden til seriesystemet eksponensialfordelt med forventning  $\frac{n}{\beta}$ . I oppgave 2 (til slutt i notatet), skal vi se at minimum av Weibull-fordelte størrelser også er Weibull-fordelt.

## 4 $k$ te ordningsvariabel

Fordelingen til  $X_{(k)}$  blir

$$F_{X_{(k)}}(x) = P(k \text{ eller flere } X_i\text{-er er } \leq x) = \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} [F_X(x)]^j [1 - F_X(x)]^{n-j}$$

fordi antallet  $X_i \leq x$  er binomisk fordelt med parametre  $n$  og  $F_X(x)$ .

Sannsynlighetstettheten finnes ved å derivere m.h.p.  $x$  og etter noe mellomregning kan den skrives:

$$f_{X_{(k)}}(x) = n \binom{n-1}{k-1} [F_X(x)]^{k-1} [1 - F_X(x)]^{n-k} f_X(x)$$

## 5 Oppgaver

**Oppgave 1.** Betrakt et parallellsystem av 2 uavhengige komponenter. Levetiden til hver komponent er eksponensialfordelt med parameter  $\lambda$ , dvs

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{for } x \geq 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

La  $V$  være levetiden til systemet. Finn fordelingen til  $V$ , samt  $E(V)$ .

**Oppgave 2.** Betrakt et seriesystem sammensatt av  $n$  komponenter. Levetiden til hver komponent følger en fordeling med kumulativ fordelingsfunksjonen

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-(\lambda x)^\alpha} & \text{for } x \geq 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

hvor  $\lambda > 0$  og  $\alpha > 0$ . Dette kalles en Weibull-fordeling med skalaparameter  $\lambda$  og formparameter  $\alpha$ . (Parametriseringen er litt anderledes enn i læreboka.)

Finn den kumulative fordelingsfunksjonen for levetiden til systemet. Hva kalles denne sannsynlighetsfordelingen?