Kapittel 4 Matematisk forventning

Definisjon

La X vere ein stok.var. med sannsynsfordeling $f(x)$.
Forventningsverdien til X er då

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Og for ein funksjon g(X);

$$\mu_{g(X)} = E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$$

NTNU
Det skapande universitetet

Forventningsverdi, to stok.var.

Definisjon 4.2

La X og Y vere to stokastiske variable med simultanfordeling $f(x,y)$, og $g(x,y)$ ein funksjon. Då er
dersom diskre

$$\mu_{g(X,Y)} = E[g(X,Y)] = \sum_x \sum_y g(x,y)f(x,y)$$

dersom kontinuerleg

$$\mu_{g(X,Y)} = E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f(x,y)dxdy$$

NTNU
Det skapande universitetet

Kovarians

Definisjon

La X og Y vere stokastiske variable med simultan sannsynsfordeling $f(x,y)$.
Kovariansen til X og Y er då:

$$Cov(X,Y) = \sigma_{xy} = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_X)(y-\mu_Y)f(x,y)dxdy$$

NTNU
Det skapande universitetet

Teorem 4.7

La X og Y vere to stokastiske variable, og $g(x, y)$ og $h(x, y)$ to funksjonar. Då er

$$E[g(X, Y) + h(X, Y)] = E[g(X, Y)] + E[h(X, Y)]$$

NTNU
Det skapande universitetet

Korrolar 4.3

La X og Y vere to stokastiske variable, og $g(x)$ og $h(y)$ to funksjonar. Då er

$$E[g(X) + h(Y)] = E[g(X)] + E[h(Y)]$$

Varians av lineær kombinasjonar

Teorem 4.9 og 4.10

Dersom X og Y er stokastiske variable med $Var(X) = \sigma_X^2$, $Var(Y) = \sigma_Y^2$ og $Cov(X, Y) = \sigma_{XY}$, så er

$$Var(aX + bY + c) = a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2 + ab\sigma_{XY}$$

NTNU
Det skapande universitetet

Rep. kovarians

Teorem 4.4

$$\sigma_{xy} = E(XY) - \mu_X \mu_Y$$

Kun for lineær kombinasjonar....

fristelsar.....

$Z = X/Y$

$$E(Z) \neq \frac{E(X)}{E(Y)}$$

...only the hard way...

Må bruke definisjonen på forventning for funksjon av to stok.var. Kan evt. approksimere vha Taylorrekker.

NTNU
Det skapande universitetet

Chebychevs teorem

Teorem 4.11

Sannsynet for at ein stokastisk variabel tar ein verdi innanfor k standardavvik frå forventningsverdien er minst $1 - 1/k^2$.
Dvs

$$P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) = 1 - \frac{1}{k^2}$$

NTNU
Det skapande universitetet

Viktigaste resultat

- $E(a + bX) = a + bE(X)$
- $Var(a + bX) = b^2 Var(X)$
- $E(a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_n X_n + c) =$
  $a_1 E(X_1) + a_2 E(X_2) + \ldots a_n E(X_n) + c$

Dersom $X_1, X_2, \ldots X_n$ er uavhengige

- $Var(a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_n X_n + c) =$
  $a_1^2 Var(X_1) + a_2^2 Var(X_2) + \ldots a_n^2 Var(X_n)$

NTNU
Det skapande universitetet